



# Кинематика на постъпателното движение на материална точка.

## Основни величини и закони.

1. Основни понятия. Закон за движение на материална точка
2. Скорост и ускорение на материална точка
3. Видове постъпателни движения
  - а) Равномерно праволинейно движение
  - б) Равнопроменливо праволинейно движение
  - в) Движение на тяло, хвърлено вертикално нагоре
  - г) Движение на тяло, хвърлено хоризонтално
  - д) Движение на тяло, хвърлено под ъгъл



# 1. Основни понятия. Закон за движение на материална точка

- Отправно тяло

Тяло, спрямо което се определя положението и движението на други тела, се нарича отправно тяло.

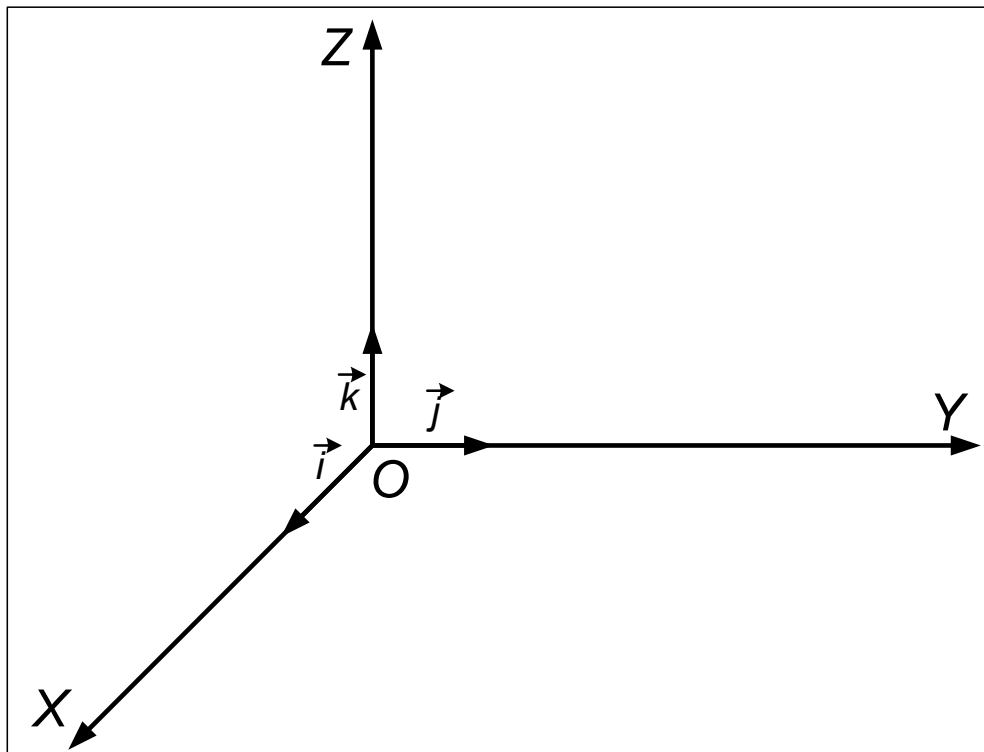
- Материална точка

При разглеждане на движението на телата може да се абстрахираме от техните размери, форма и вътрешна структура.



- Отправна система

Отправното тяло заедно с неподвижно свързана с него координатна система и часовник образуват отправна система.

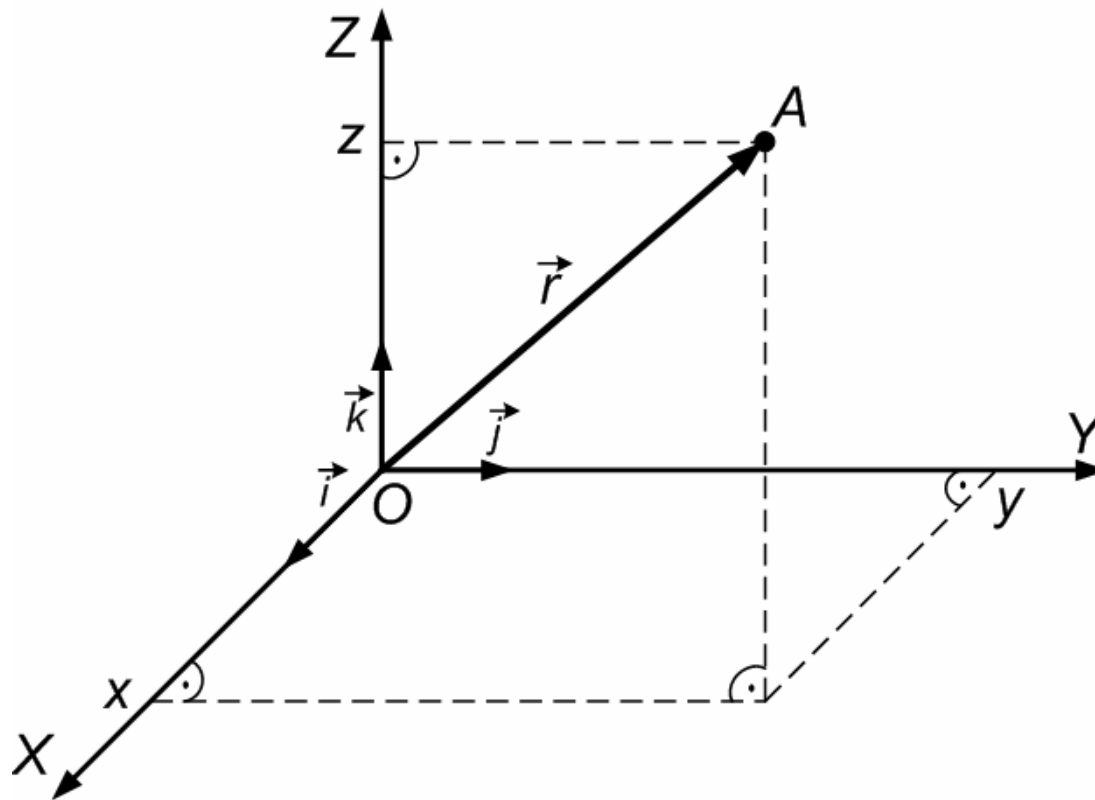


Фиг. 1



- Радиус-вектор

Вектор в координатната система OXYZ с начало точка O и край разглежданата точка A.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Фиг. 2



# Кинематични уравнения на движение на материалната точка.

- Във векторен вид

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1.3)$$

- В скаларен вид

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \quad (1.3')$$



- Траектория

Линията, която описва материална точка при движението си спрямо определена отправна система .

- Вид на траекторията

Определя се след изключване на времето  $t$  от кинематичните уравнения на движение

Праволинейни движения

Криволинейни движения

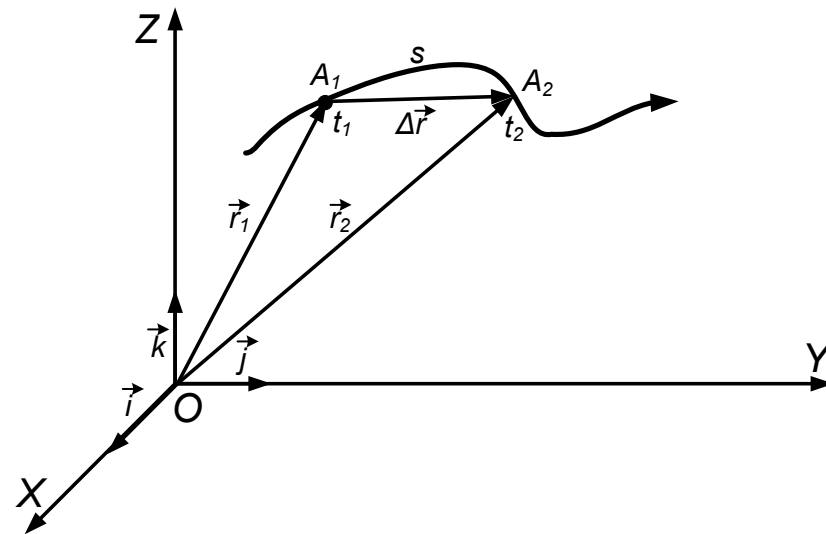


- Път  
Разстоянието  $s$ , което изминава материалната точка за определен интервал от време  $\Delta t$ , отчетено по траекторията.  
 $s \geq 0$ .

- Преместване  $\Delta \vec{r}$  - векторна физична величина  
$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Посока - вектор с начало положението на материалната точка в началния момент от време и край положението на материалната точка в крайния момент от време.

Големина - най-късото разстояние между двете положения на материалната точка.  $|\Delta \vec{r}| \leq s$



Фиг. 3



## 2. Скорост и ускорение на материална точка

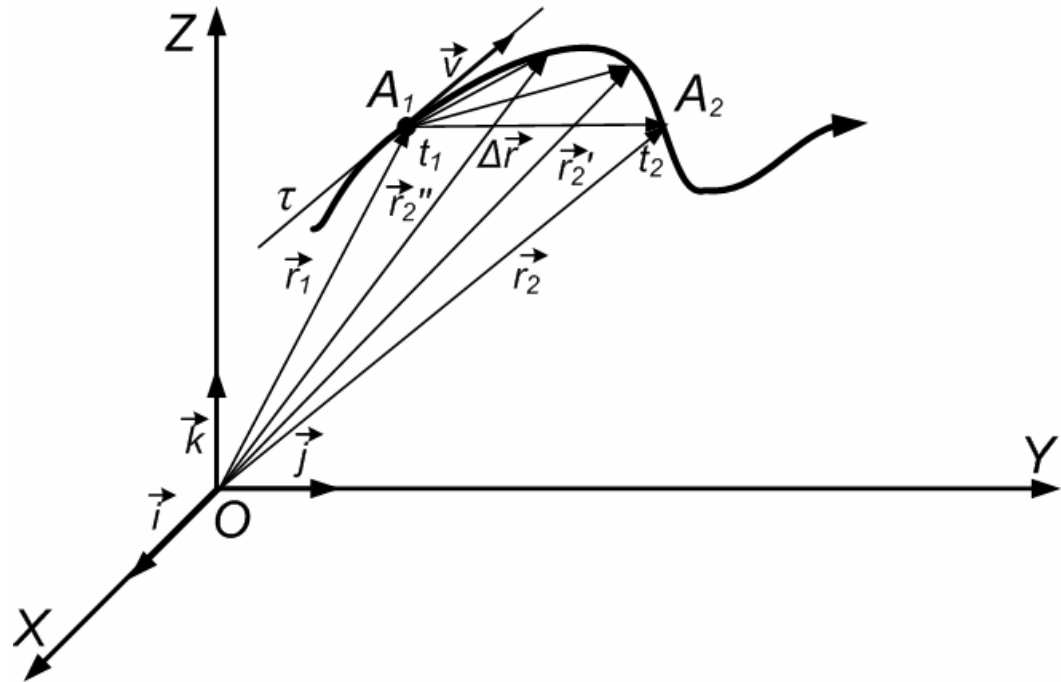
- Средна скорост – векторна физична величина

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

посока – на преместването  
големина –

$$v_{cp} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

мерна единица  
m/s



Фиг. 4



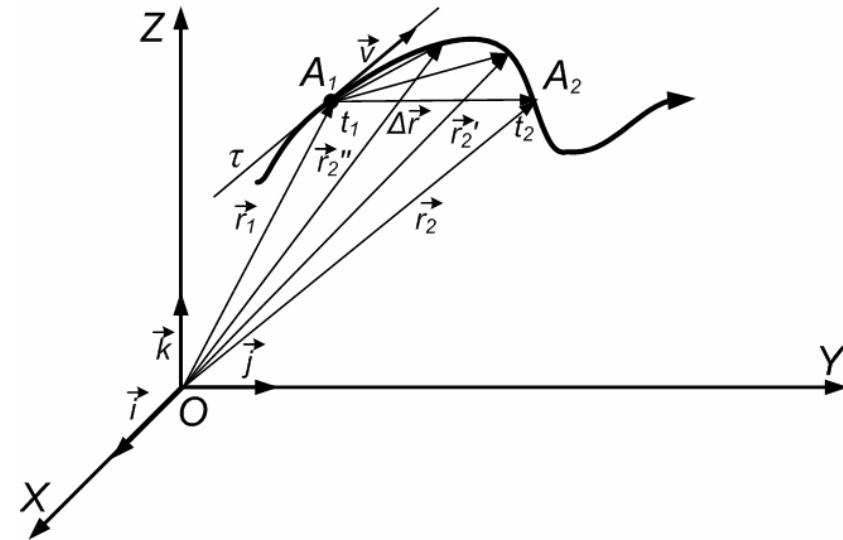


- Моментна скорост – векторна физична величина

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Моментната скорост на материална точка в дадена точка от траекторията ѝ е първа производна на радиус-вектора по времето. Направлението ѝ е по допирателната към траекторията на материалната точка в точката, в която се намира в разглеждания момент от време. Големината ѝ се дава с изрази

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}$$



Фиг. 4

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



- Средно ускорение – векторна физична величина

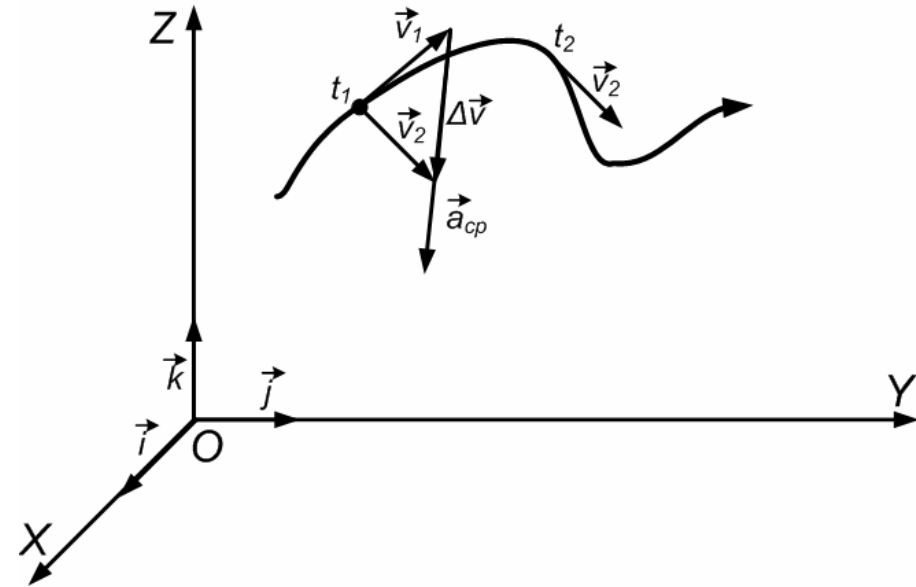
$$\vec{a}_{cp} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

посока - на вектора  $\Delta \vec{v}$

големина –  $a_{cp} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$

мерна единица –  $m/s^2$

- Моментно ускорение  
То е първа производна на скоростта по времето или втора производна на радиус-вектора на материалната точка по времето.



Фиг. 5

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$



$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Големина на  
ускорението

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Компоненти на  
ускорението  $\vec{a}$   
по осите X, Y и Z

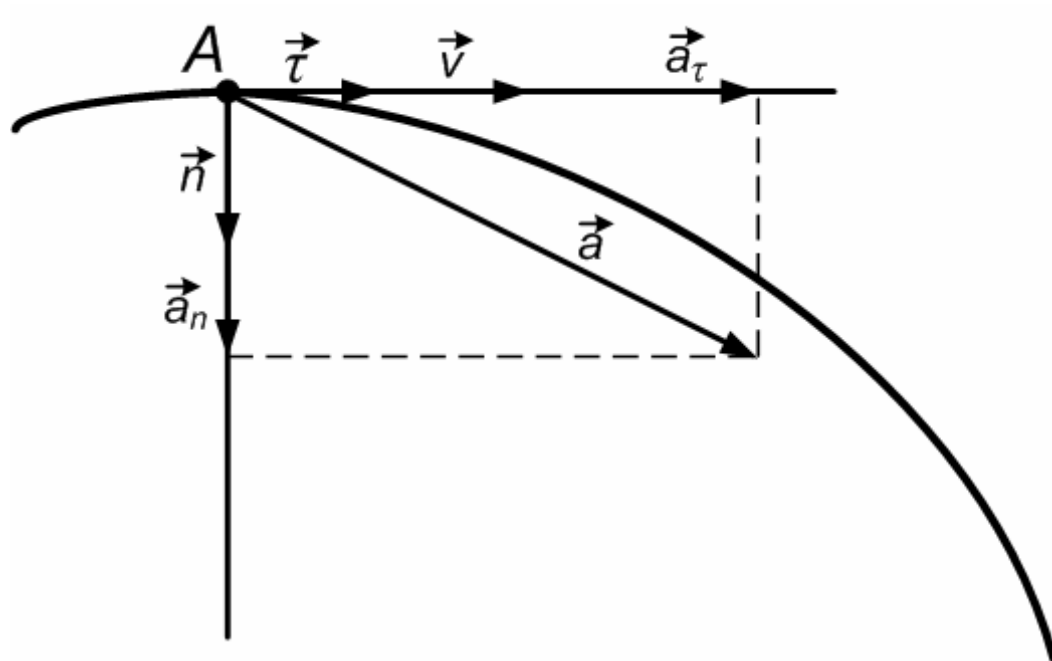
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$



# Тагенциално и нормално ускорение



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

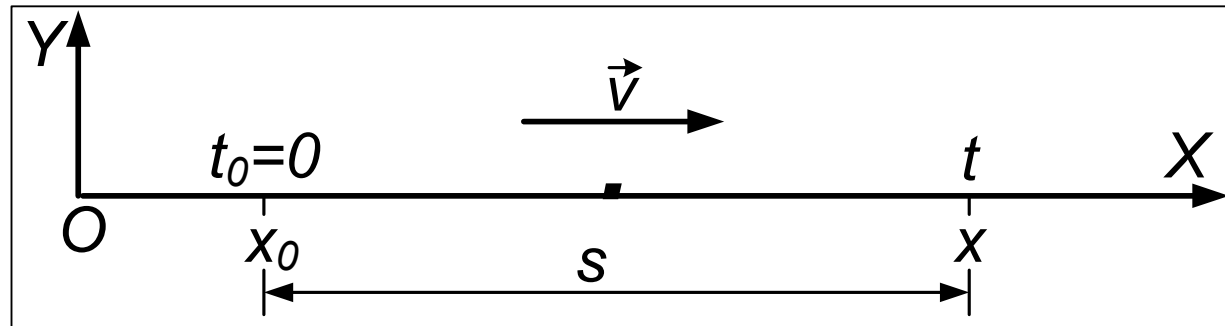
Фиг. 6

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



### 3. Видове постъпателни движения

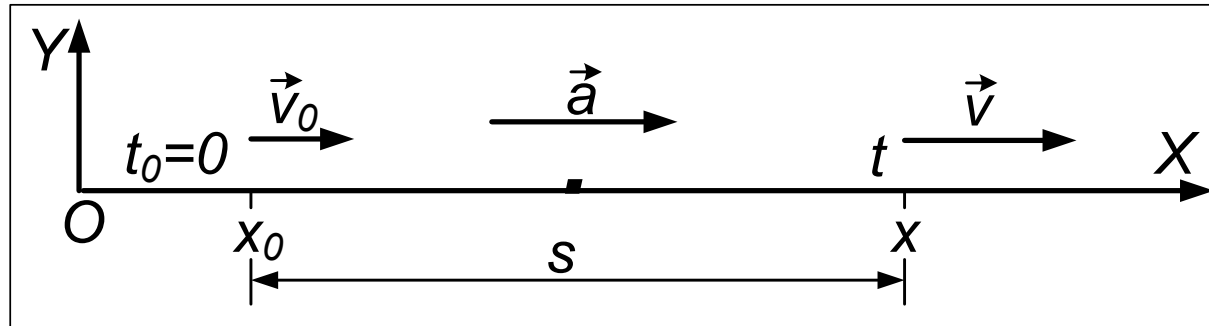
#### а) Равномерно праволинейно движение



- закон за скоростта  
 $v = \text{const}$
- закон за координатата  
 $x = x_0 + vt$
- закон за пътя  
 $s = x - x_0$   
 $s = vt$

Фиг. 7

## б) Равнопроменливо праволинейно движение



- закон за скоростта

$$v = v_0 \pm at$$

Фиг. 8

- закон за координатата

$$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$$

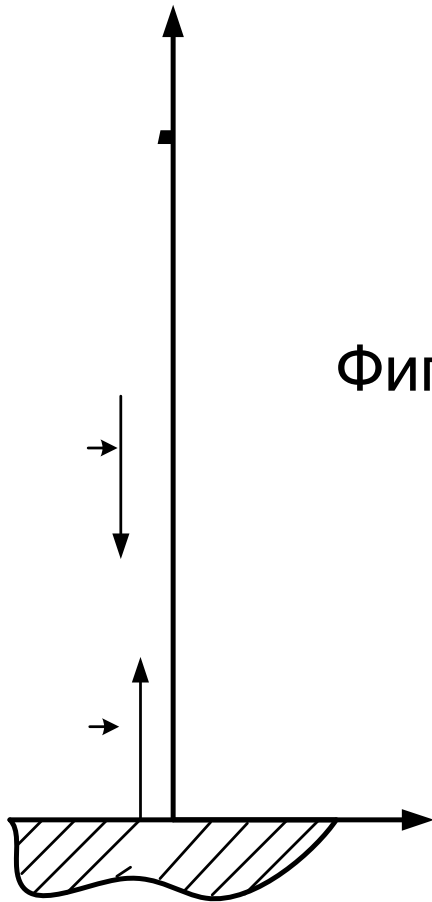
- закон за пътя

$$s = x - x_0$$

$$s = v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$$



## В) Движение на тяло, хвърлено вертикално нагоре



Фиг. 9

- закон за скоростта

$$v = v_0 - gt$$

- **У** закон за координатата

$$y_{max} \quad t_1 y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$



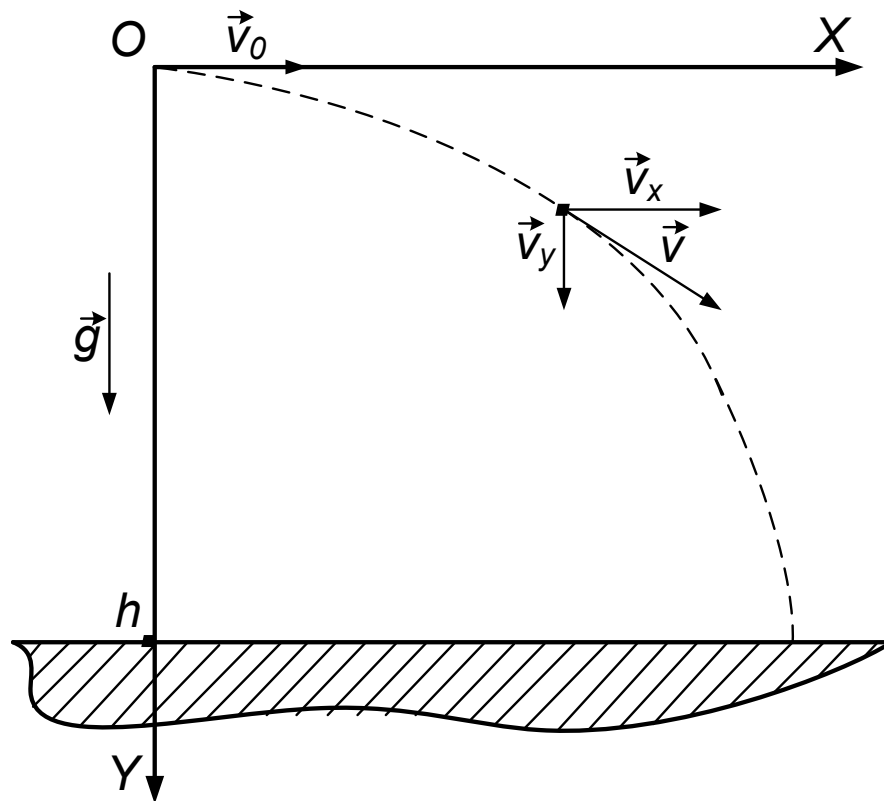
# Типове задачи

- Задава се големината началната скорост  $v_0$  на тялото. Търсят се максималната височина  $u_{max}$ , до която ще достигне тялото и в кой момент от време  $t_1$  става това.
- Задава се големината началната скорост  $v_0$  на тялото. Търсят се времето  $t$ , след което тялото пада на земната повърхност и каква е скоростта му  $v$  в този момент от време.
- Задава се големината началната скорост  $v_0$  на тялото. Определя се скоростта  $v$  на тялото в даден момент от време  $t'$ .





## г) Движение на тяло, хвърлено хоризонтално



Фиг. 10

- Закони за компонентите на скоростта

$$v_x = v_0 ,$$

$$v_y = gt .$$

- Закони за координатите

$$x = v_0 t ,$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2$$

# Типове задачи



- Задава се големината на началната скорост  $v_0$  на тялото и височината  $h$ , от която е хвърлено. Търсят се времето  $t$ , след което тялото пада на земната повърхност и далечината на полета  $x$ , отчетена хоризонтално.
- Задават се големината на началната скорост  $v_0$  на тялото. Определя се скоростта  $v$  на тялото в даден момент от време  $t'$ .



# Свободното падане на тяло

- Закон за скоростта

$$v = gt$$

- Закон за координатата

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$



## д) Движение на тяло, хвърлено под ъгъл

- Закони за компонентите на скоростта

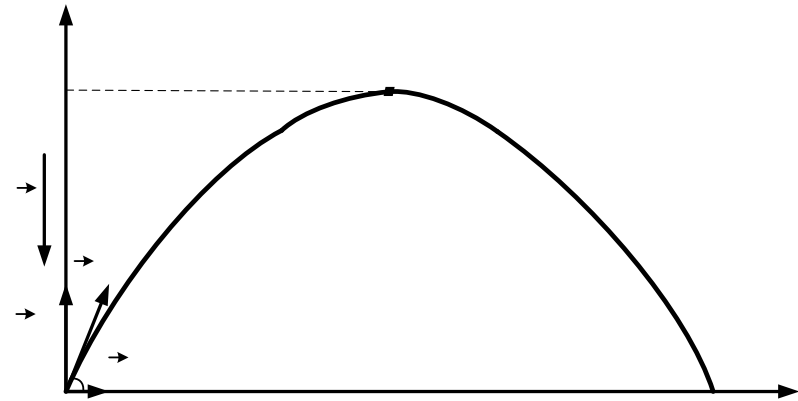
$$V_x = V_{0x} = V_0 \cos \alpha$$

$$V_y = V_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt$$

- Закони за координатите

$$x = v_{0x}t = v_0t \cos \alpha$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2$$



Фиг. 11



# Типове задачи

- Задават се големината на началната скорост  $v_0$  на тялото и ъгълът  $\alpha$ , под който се хвърля то. Търсят се максимална височина  $y_{max}$ , която ще достигне тялото и в кой момент  $t_1$  от време става това.
- Задават се големината на началната скорост  $v_0$  на тялото и ъгълът  $\alpha$ , под който се хвърля то. Търсят се времето  $t$ , след което тялото пада на земната повърхност и далечината на полета  $x$ , отчетена хоризонтално.
- Задават се големината началната скорост  $v_0$  на тялото и ъгълът  $\alpha$ , под който се хвърля то. Определя се скоростта  $\vec{V}$  на тялото в даден момент от време (големина и посока).
- Търси се под какъв ъгъл  $\alpha$  трябва да се хвърли тялото, че далечината на полета да е максимална ( $x = x_{max}$ ).



# Кинематика на въртеливото движение на абсолютно твърдо тяло. Основни величини и закони. Връзка между линейните и ъгловите величини

1. Кинематика на въртеливото движение  
на абсолютно твърдо тяло
2. Основни величини и закони



# 1. Кинематика на въртеливото движение на абсолютно твърдо тяло

- Когато върху тяло се приложи сила, то изменя формата си. Описването на въртеливо движение на това тяло много се усложнява. Затова се въвежда едно идеализирано понятие за тяло – абсолютно (идеално) твърдо тяло (АТТ).
- АТТ е това тяло, което не се деформира в разглежданата задача, т.е. разстоянието между кои да е две точки от тялото остава неизменно.



# 1. Кинематика на въртеливото движение на абсолютно твърдо тяло

- Има два основни вида въртеливи движения – въртене на тяло около постоянна ос и въртене на тяло около точка.
- При въртене на тяло около постоянна ос положението на оста на въртене не се променя в пространството и всички точки от тялото описват окръжности в равнини, перпендикулярни на оста и с центрове, лежащи на нея. Пример за въртене на тяло около постоянна ос е отварянето и затварянето на шарнирно окачена врата.

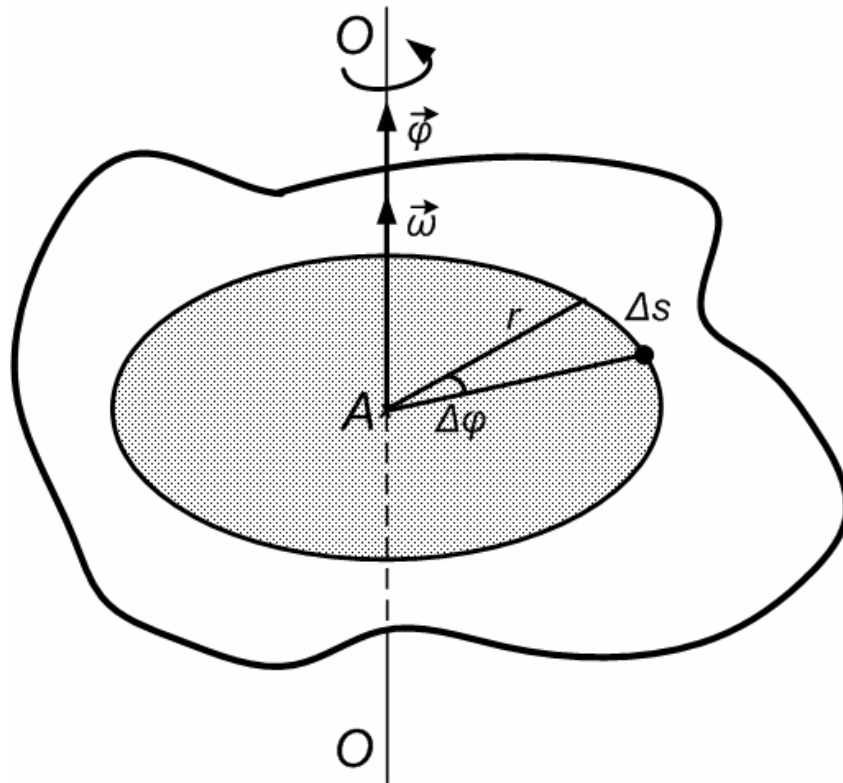


# 1. Кинематика на въртеливото движение на абсолютно твърдо тяло

- При въртене на тяло около точка всички точки от тялото също се движат по окръжности с различни радиуси и в успоредни равнини, перпендикулярни на оста на въртене и с центрове, лежащи на оста. Различното при това движение е, че оста на въртене изменя своето положение в пространството като извършва прецесионно движение и описва т.н. конус на прецесията. Примери за такова движение са въртенето на пумпала и на жироскопа.



## 2. Основни величини и закони



Фиг. 1

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{r}$$

Ъгълът на завъртане има направление на оста на въртене. Посоката му се определя по правилото на десния винт: Ако свитите пръсти на дясната ръка са по посоката на въртенето, изпънатият палец показва посоката на ъгла на завъртане.

Посоката на ъгловата скорост съвпада с тази на ъгла на завъртане



## 2. Основни величини и закони

Мерната единица за ъгъл на завъртане в SI е rad, а за ъглова скорост – rad/s.

Връзка между линейната и ъгловата скорост

$$\omega = \frac{\Delta s}{r\Delta t} = \frac{v}{r}$$

$$v = \omega r$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Скоростта на точка от АТТ, въртящо се около постоянна ос е векторно произведение на ъгловата скорост и радиус-вектора на точката.



Ако въртенето на тялото е равномерно, законът за скоростта и за ъгъла на завъртане са

$$\omega = \text{const}$$

$$\varphi = \omega t$$

Равномерното въртеливо движение на тяло около постоянна ос се характеризира с:

- Период  $T$  – времето, за което тялото прави един оборот. Мерната единица за период в SI е s.
- Честота  $\nu$  – броят на оборотите, които извършва тялото за единица време. Мерната единица за честота в SI е Hz.



- Съгласно дефинициите между честотата и периода на въртящото се тяло съществува връзката

$$\nu = \frac{1}{T}$$

- За време  $\Delta t = T$  тялото се завърта на ъгъл  $\Delta\varphi = 2\pi$  rad и от закона за ъгъла на завъртане се получава формулата

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- От сравняването на двете формули следва

$$\omega = 2\pi\nu$$



# Ъглово ускорение

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}$$

- Ъгловото ускорение на въртящо се тяло се дефинира като първа производна на ъгловата скорост по времето или втора производна на ъгъла на завъртане по времето.
- Направлението на  $\vec{\alpha}$  е по оста на въртене. Векторите  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\omega}$  са колинеарни. Те имат едни и същи посоки, когато движението е ускорително и са в противоположни посоки, когато движението е закъснително.



Връзка между големината на тангенциалното ускорение  $a_\tau$  и големината на ъгловото ускорение  $\alpha$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}$$

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(\omega r) = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)r$$

$$a_\tau = \alpha r$$



Динамика на постъпателното движение  
на материална точка. Закони на Нютон.

Закон за запазване на импулса.

1. Първи закон на Нютон
2. Сила, маса и импулс на тяло. Втори закон на Нютон
3. Трети закон на Нютон
4. Сили в механиката





- Динамиката е основен раздел от механиката, която изучава движението на телата като отчита взаимодействието между тях. Чрез нея може да се обясни защо конкретни движения имат този вид.
- В основата на механиката лежат три основни закона, изказани от Нютон през 1687 г. Те са формулирани на базата на огромния експериментален материал, натрупан дотогава. Правилността им се потвърждава от следствията, които се извеждат от тях и са в съответствие с тях.
- Нютоновата механика е механика на тела с големи маси (в сравнение с масата на атомите) и на малки скорости (в сравнение със скоростта на светлината).



# 1. Първи закон на Нютон

- Всяко тяло се намира в състояние на покой или на равномерно праволинейно движение, докато друго тяло не го накара да измени това свое състояние.
- Скоростта на дадено тяло остава постоянна, в частност равна на нула дотогава, докато другите тела не доведат до нейното изменение.
- Свойството на телата да запазят състоянието си на покой или на равномерно праволинейно движение, когато не им действат други тела, се нарича инерция.



- Да поставим въпроса: “Валиден ли е първия закон на Нютон за всяка отправна система?”
- Отправна система, в която е валиден първия закон на Нютон, се нарича инерциална. Всяка система, движеща се равномерно и праволинейно спрямо дадена инерциална система, също е инерциална. От всичко казано дотук може да се обобщи, че съществуват безброй много инерциални системи.
- Например отправна система с начало центъра на Слънцето и с оси, насочени към определени звезди, с много голяма степен на точност може да се приеме за инерциална и се нарича хелиоцентрична отправна система.

## 2. Сила, маса и импулс на тяло.

### Втори закон на Нютон



- Силата е векторна величина, която се явява мярка на механичното въздействие, което разглежданото тяло изпитва от страна на другите тела. Механичното въздействие при контакт между телата предизвиква от една страна промяна на движението им, а от друга – деформация. Тези прояви на силата служат за основа на методите на нейното измерване.
- Казваме, че силата е определена, ако е с известна големината, приложната точка и посока в пространството. Правата, по която е насочена силата се нарича линия на действие на силата.

# Импулс на тяло



- Да разгледаме една механична система от две тела с маси  $m_1$  и  $m_2$  съответно. Ако взаимодействието им с другите тела се пренебрегне, системата се нарича затворена. Нека в тази затворена система двете тела си взаимодействат, например чрез удар. Пресмятат се промените на техните скорости и съответно.

$$\frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$m_1 \Delta \vec{v}_1 = - m_2 \Delta \vec{v}_2$$

$$\Delta(m_1 \vec{v}_1) = - \Delta(m_2 \vec{v}_2)$$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

- Импулсът на тяло е векторна физична величина, която е равна на произведението от масата на тялото и неговата скорост и има посока на скоростта на тялото. Явява се мярка за количеството на движението на тялото.
- Мерната единица за импулс на тяло в SI е kg.m/s.



# Вторият закон на Нютон

- Скоростта, с която се изменя импулса на тялото е равна на действащата върху него сила.  
Нарича се основен закон на динамиката на постъпателно движение.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

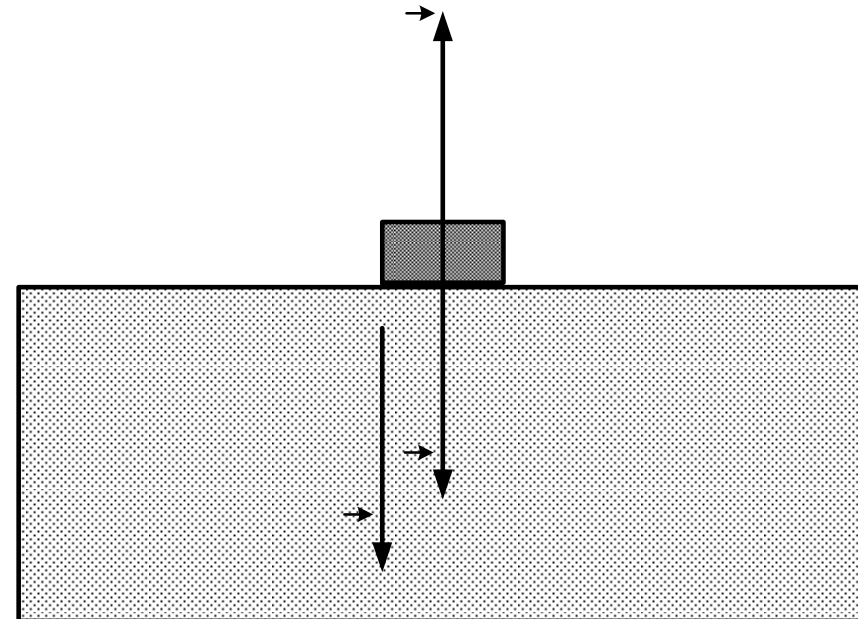
- Силата, която действа на едно тяло е равна на произведението от масата на материалната точка и ускорението, което получава то (друга формулировка на втория закон на Нютон).



### 3. Трети закон на Нютон

- Всяко действие на едно тяло върху друго тяло носи характера на взаимодействие. Ако първото тяло действа на второто тяло със сила  $\vec{F}_{12}$ , то и второто тяло действа на първото със сила  $\vec{F}_{21}$ .
- Силите, с които си взаимодействат две тела са равни по големина и противоположни по посока

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Фиг. 1

## 4. Закон за запазване на импулса



$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad \Delta \vec{p}_1 = - \Delta \vec{p}_2 \quad \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0} \quad \Delta \vec{p} = \vec{0}$$

- Изменението на пълния импулс на затворена механична система от тела е равно на нулевия вектор (закон за запазване на импулса).

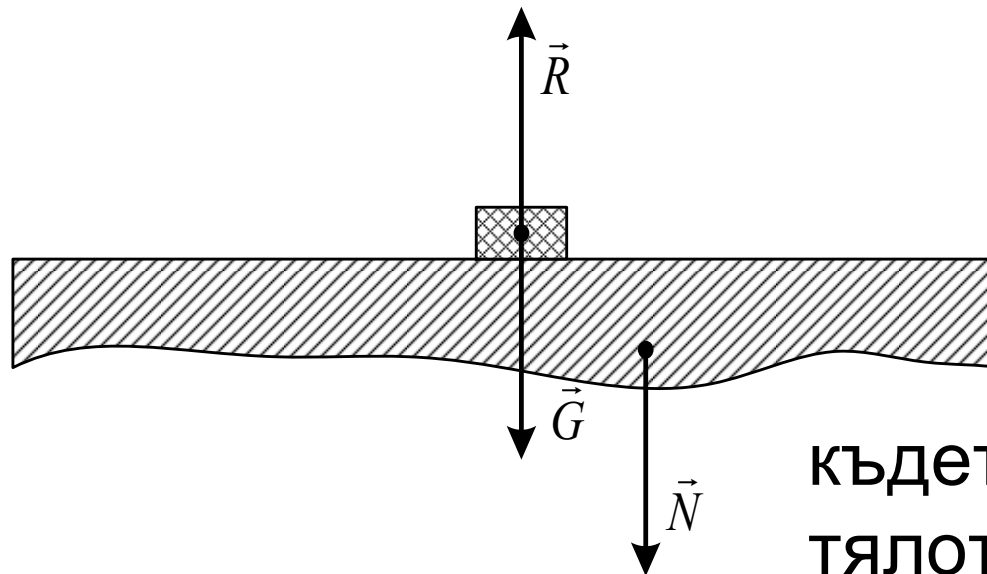
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$$

- Пълният импулс на една затворена механична система не се променя с времето, т.е. е постоянен вектор (друга формулировка на закона за запазване на импулса) .





## 4. Сили в механиката - Сила на тежестта



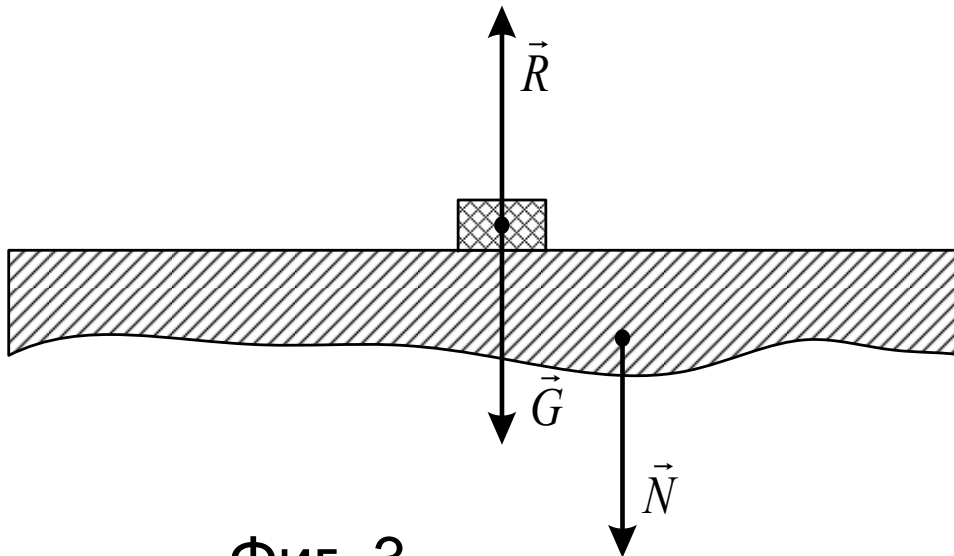
Фиг. 2

$$\vec{G} = m\vec{g}$$
$$g = \gamma \frac{M}{R^2}$$

където  $m$  е масата на тялото;  $g$  - земно ускорение;  $\gamma$  - гравитационна константа;  $M$  и  $R$  са маса и радиус на Земята.



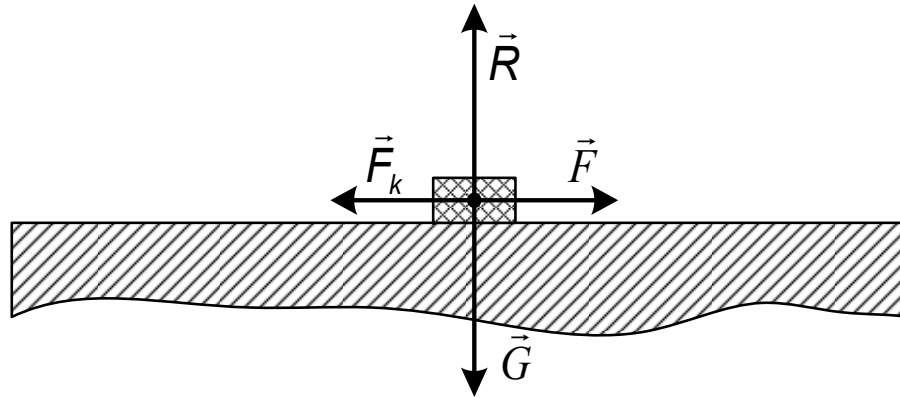
- Сила на нормалния натиск и  
сила на реакция на опората



$$\vec{R} = -\vec{N}$$

Фиг. 3

# - Сили на триене



Фиг. 4

$$F_{k0} = k_0 R$$

- При  $F > F_{k0}$

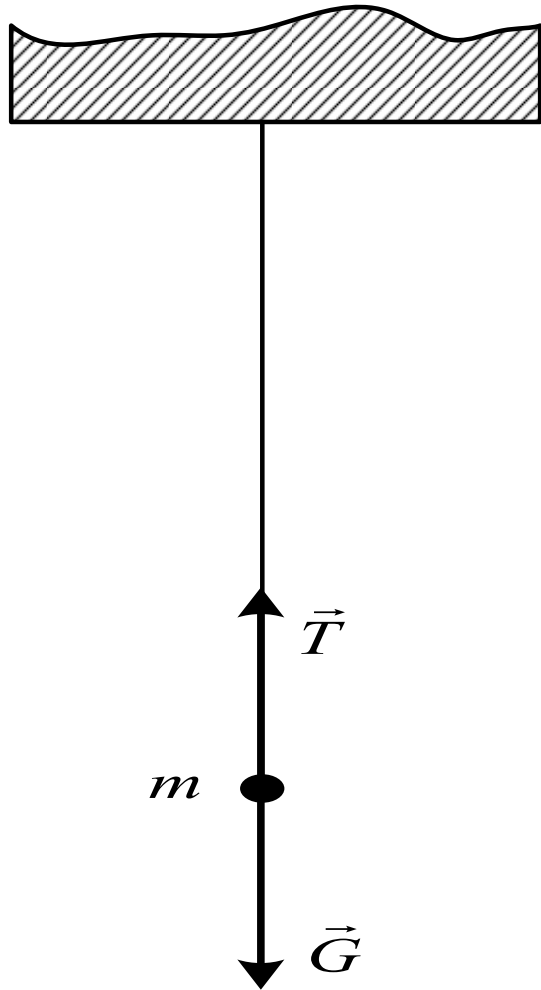
$$F_k = kR$$

$$F_k = \frac{k_1}{r} R$$

където  $k_0$  се нарича статичен коефициент на триене при хлъзгане,  $k$  е коефициент на триене при хлъзгане,  $k_1$  е коефициент на триене при търкаляне, а  $r$  е радиус на сферата или на цилиндъра.



## - Сила на опън

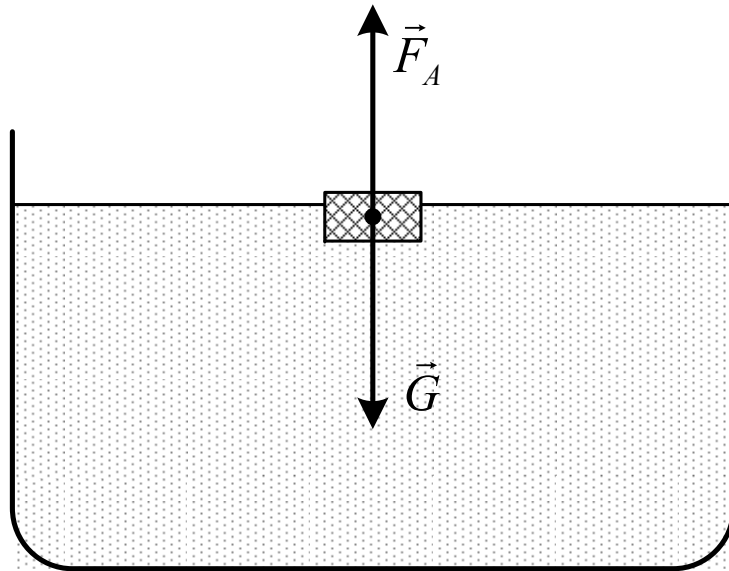


Фиг. 5

Това е силата  $\vec{T}$ , с която нишката действа на опъващото я тяло. Нека тялото е окачено на статив посредством тънка нишка. Силата на тежестта, действаща на тялото, се уравниоветесява със силата на опън.

# Архимедова сила

$$F_A = \rho V g$$

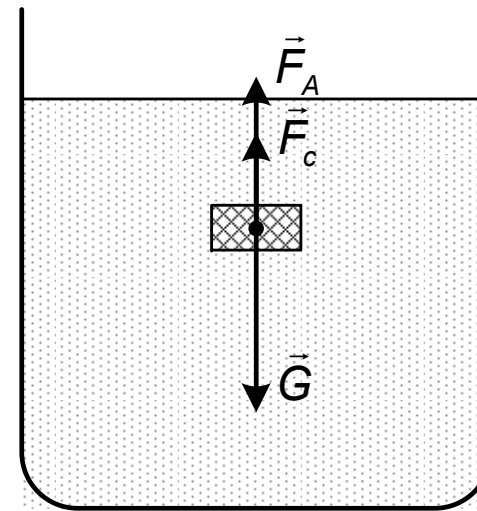


Фиг. 6

# Съпротивителна сила

$$F_c = -fv$$

$$F_c = -6\pi\eta r v$$



Фиг. 7

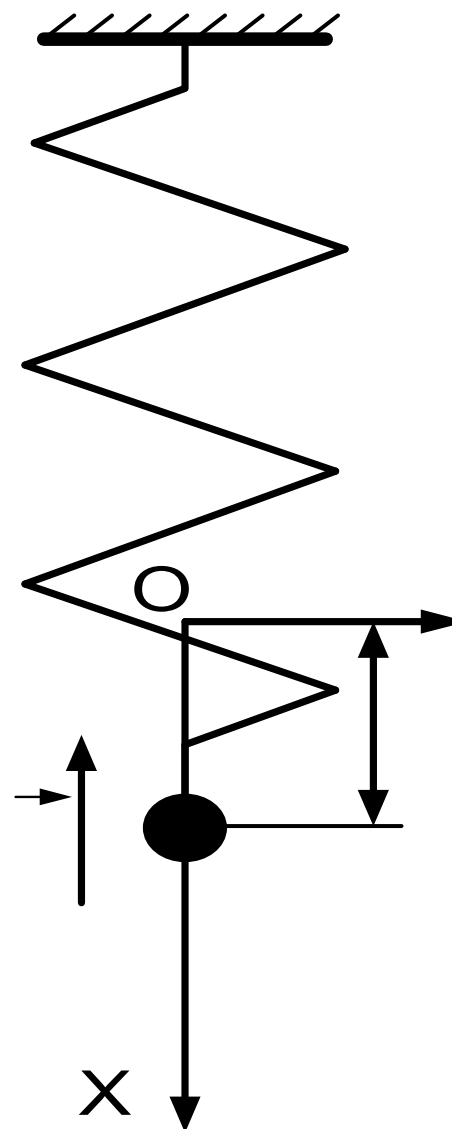




## Еластична сила

$$F = - kx$$

Фиг. 8





# Работа на силите. Кинетична и потенциална енергия на механична система. Закон за запазване на енергията

1. Механична работа
2. Кинетична и потенциална енергия на тяло. Пълна механична енергия
3. Закон за запазване на механичната енергия

# 1. Механична работа



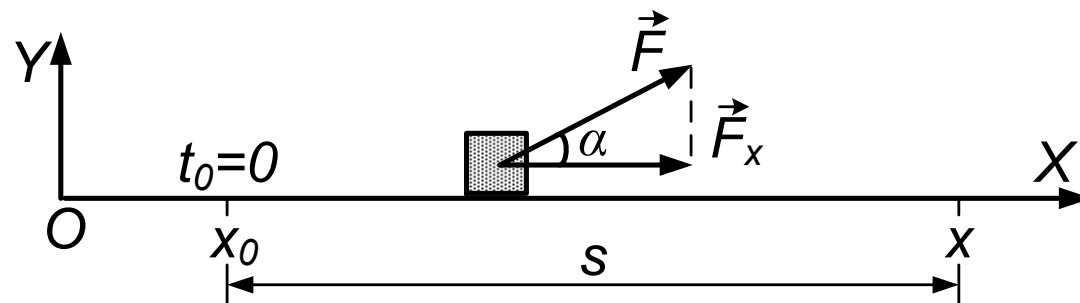
Енергията е универсална количествена мярка за движението и взаимодействието. С различните форми на движение на материята се свързват различните форми на енергията: механична, топлинна, електромагнитна, ядрена. При някои явления формата на движение на материята се запазва (нагриване на по-студеното тяло при допир с по-топлото), а при други се променя (превръщане на механичното движение в топлинно вследствие триенето. Трябва да се има предвид, че енергията отдавана от едно тяло винаги е равна на енергията, получена от другото тяло.





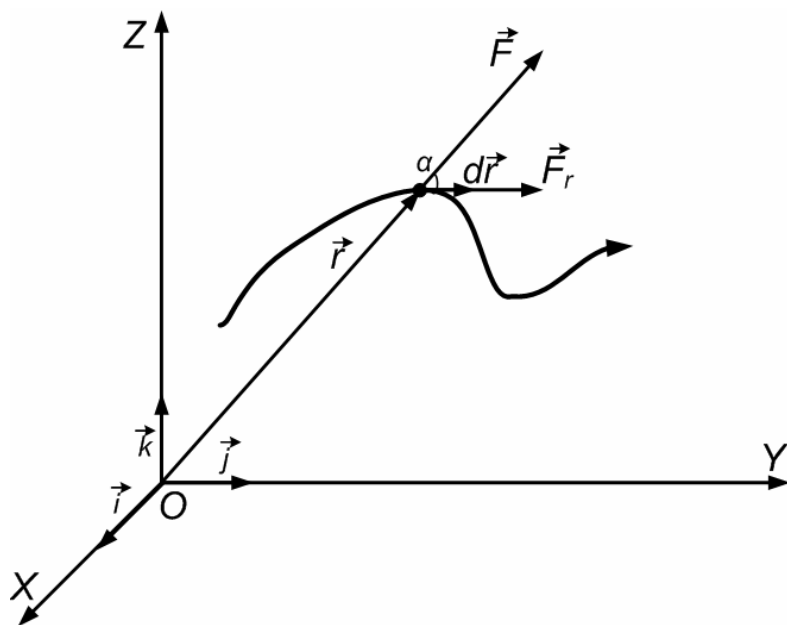
- Изменението на механичното движение на едно тяло е резултат от взаимодействието му с други тела. За да се характеризира количествено процесът на обмен на енергия между взаимодействащи се тела, се въвежда понятието работа на сила.
- Нека тяло лежи на хоризонтална повърхност и започва да се движи под действие на постоянна сила
- $\vec{F}$ , сключваща ъгъл  $\alpha$  с направление на преместването. Работата на тази сила е равна на произведението от проекцията на силата  $F_x$  върху направлението на преместването и големината на преместването  $s$ :

$$A = F_x s = F s \cos \alpha$$



Фиг. 1

# Елементарна работа $dA$



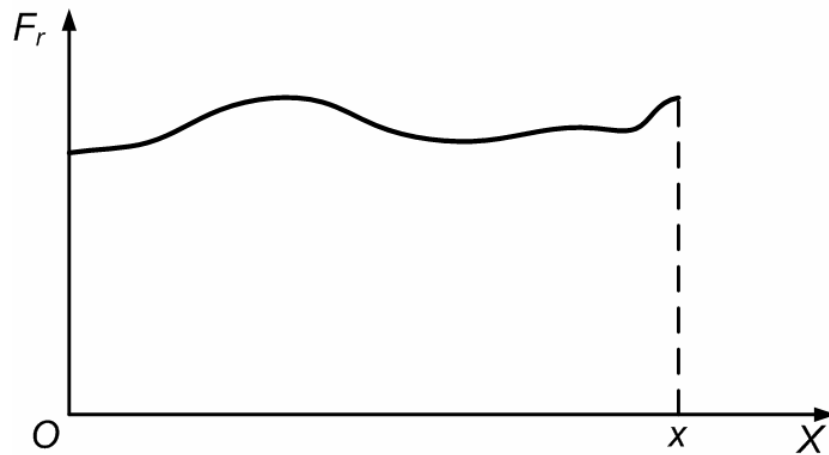
Фиг. 2

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \alpha = F_r dr$$

- Ако е изпълнено условието  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  rad, работата на силата е положителна, т.е. силата е движеща.
- Ако е изпълнено условието  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  rad, работата на силата е отрицателна, т.е. силата е съпротивителна. Такива са силата на триене при хлъзгане, силата на триене при търкаляне, съпротивителна сила при движение на тяло във флуид, сила на тежестта при издигане на тяло вертикално нагоре.
- При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  rad работата на силата е равна на нула. В този случай силата е перпендикулярна на посоката на движение на тялото. Такава е работата на силата на тежестта при праволинейно движение на тяло, на центростремителната сила при равномерно движение на тяло по окръжност



$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_r \cdot ds$$



Фиг. 3

Работата на силата може да се определи графично. Тя числено е равна на лицето на равнинната фигура с граници графиката на функцията  $F_r = F_r(x)$ , ординатите  $x = 0$  и  $x$  и обцисната ос.

- Единицата за работа в SI е джаул (J).

# Мощност



- За да се характеризира скоростта на извършената работа се въвежда величината мощност  $P$ . Тя се определя с израза

$$P = \frac{dA}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- Мощността е скаларна физична величина, която е равна на скаларното произведение от силата, действаща на тялото и скоростта му.
- Единицата за мощност в SI е ват (W).



## 2. Кинетична и потенциална енергия на тяло. Пълна механична енергия

- Кинетичната енергия на една механична система е енергията на нейното механично движение.
- Нека тялото е в покой и започва да му действа сила  $\vec{F}$ , която предизвиква неговото движение и извършва работа. Енергията на движещото се тяло нараства със стойността на извършената работа. Следователно елементарната работа  $dA$  на силата за изминатия път  $dr$  е равна на нарастване на кинетичната енергия на тялото

$$dA = dE_k .$$



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$dA = mv dv \quad E_k = \int_0^v mv dv$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

- Кинетичната енергия на тяло с маса  $m$ , движещо се със скорост  $v$  е полупроизведение на масата на тялото и скоростта му на квадрат.
- В различните инерциални системи, движещи се една спрямо друга, скоростта на тялото ще бъде различна. Следователно различна ще бъде и кинетичната му енергия на всяка от тях. Кинетичната енергия на тялото зависи от оправната система.

# Потенциална енергия



- Потенциалната енергия е механична енергия на система от тела, която се определя от взаимното им разположение и от характера на силите на взаимодействие между телата.
- Нека взаимодействието между телата се осъществява чрез силови полета, които се характеризират с независимост на работата на действащите сили от вида на траекторията на преместването и зависимост от началното и крайно положение на тялото. Тези полета се наричат потенциални, а действащите в тях сили – консервативни. Такива са гравитационните и еластичните сили.
- Ако работата, извършена от една сила зависи от траекторията на движение на тялото от една точка до друга, силата се нарича неконсервативна. Пример за такава сила е сила на триене.



- Тяло, намиращо се в потенциално поле, притежава потенциална енергия . Полето на системата Земя-тяло е потенциално. Потенциалната енергия на тяло, издигнато на височина  $h$  над земната повърхност е

$$E_p = mgh + \text{const} .$$

- Потенциалната енергия е определена с точност до константа. Трябва да се избере ниво, на което се приема тя да е нула. Обикновено това ниво е морското равнище – при  $h = 0$  се приема  $E_p = 0$ . За константата се получава, че тя има стойност нула.
- Следователно изразът за потенциална енергия на тяло в системата Земя-тяло е

$$E_p = mgh$$





Кинетичната енергия на едно тяло винаги е неотрицателна величина, докато потенциалната енергия може да приема и отрицателни стойности при определен избор на нулево ниво. Например, ако на морското равнище се изкопае кладенец с дълбочина  $h'$  и се пусне камък в него, когато е на дъното на кладенеца камъкът има потенциална енергия  $E_p = - mgh'$



# Пълна механична енергия

- Пълната механична енергия на едно тяло е сума от кинетичната и потенциалната му енергия

$$E = E_k + E_p$$

- Изразът се отнася и за система от тела – пълната механична енергия на една система е сума от кинетичната и потенциалната енергия на телата.



### 3. Закон за запазване на механичната енергия

- Един от основните закони във физиката и естествознанието е законът за запазване на енергията. В природата енергията не се губи, а само се превръща от една форма в друга. В частност такива превръщания могат да се извършват и с механична форма на енергията.
- Законът за запазване на механичната енергия може да се изведе от втория закон на Нютон.

$$\int_1^2 d(E_k + E_p) = A_{12}$$

- Изменението на пълната механична енергия на системата при преминаване от едно състояние в друго е равно на работата, извършена от външните неконсервативни сили.



- Когато на системата не действат неконсервативни сили

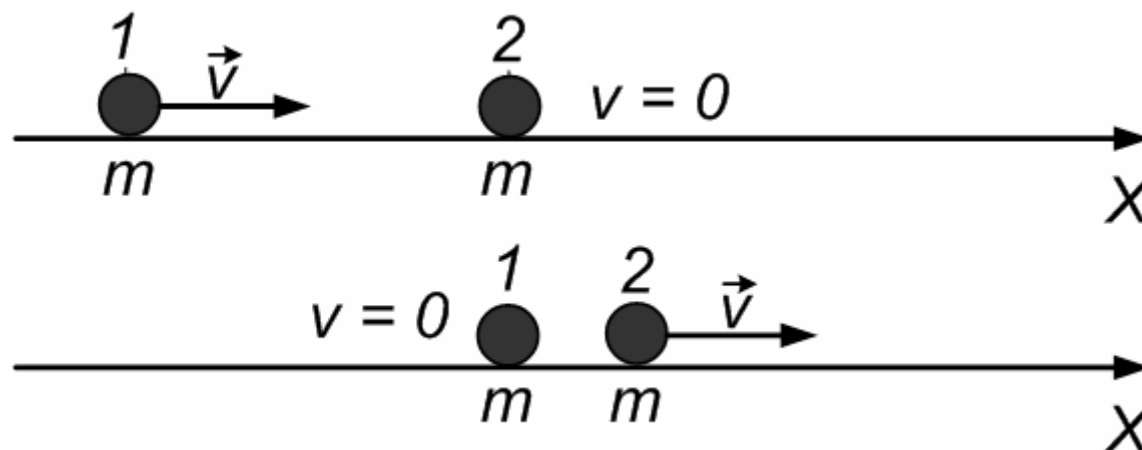
$$d(E_k + E_p) = 0$$

$$E = E_k + E_p = \text{const} .$$

- Изразите са математическия запис на закона за запазване на механичната енергия.
- Пълната механична енергия на една затворена консервативна система не се променя с времето (остава постоянна).



## Идеално еластичен удар



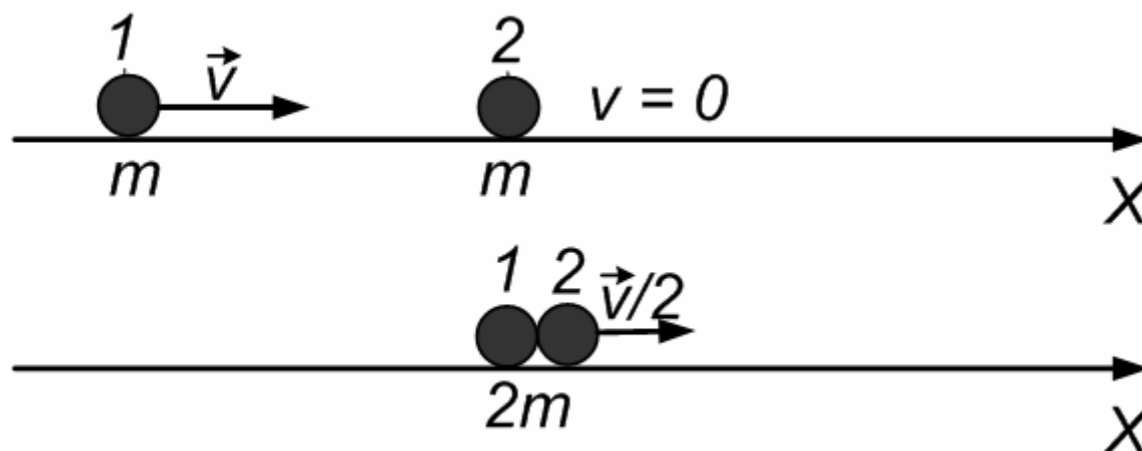
$$mv = mv_1 + mv_2$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = v$$



## Идеално нееластичен удар



$$mv = (m + m)v'$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m + m)v'^2}{2} + E_V$$

$$v' = v / 2$$



# Динамика на въртливо движение. Основен закон на динамиката на въртеливото движение. Закон за запазване на момента на импулса

1. Основни величини
2. Инерционен момент. Теорема на Щайнер
3. Основен закон на динамиката на въртеливото движение. Закон за запазване на момента на импулса
4. Кинетична енергия на въртящо се тяло
5. Връзка между линейните и ъгловите величини



## Момент на сила спрямо точка

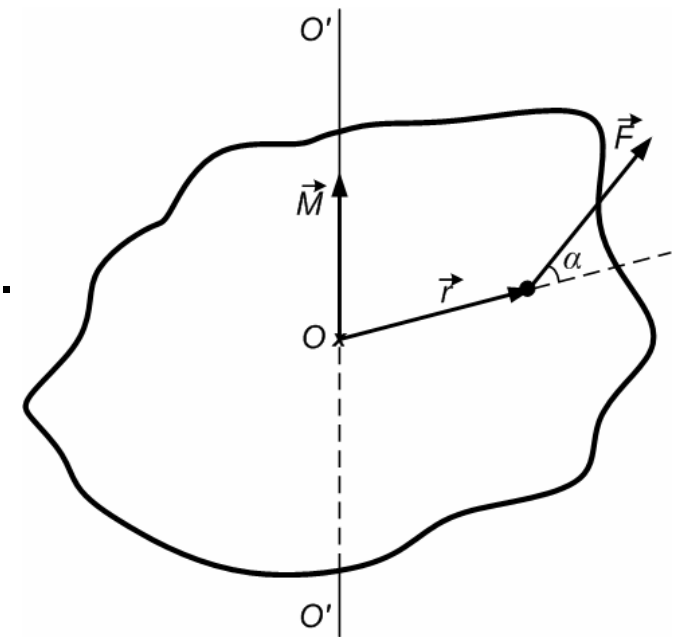
Нека върху тялото действа сила ,  
намираща се на разстояние  $r$  от  
точка  $O$ . Възниква момент , който се  
стреми да завърти тялото и се  
нарича момент на сила спрямо точка.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

големина  $M = rF \sin \alpha$

посока - по правилото на дясната  
ръка

Мерната единица за момент на сила  
в SI е нютон по метър (N.m).

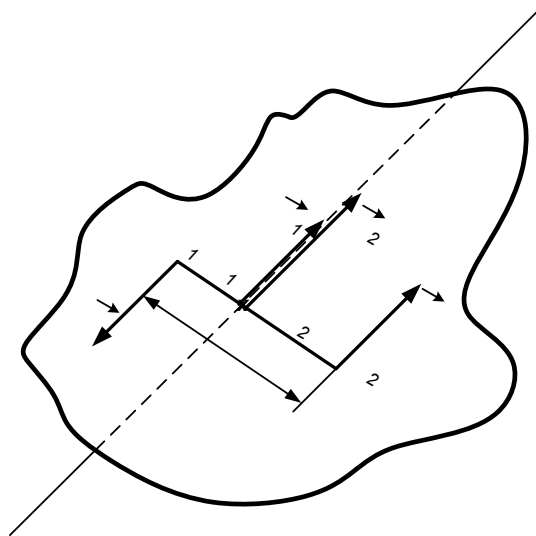


Фиг. 1





## Двойка сили



Фиг. 2

- Двойка сили са две равни по големина и противоположни по посока сили, лежащи в една равнина (но не и на една права) образуват двойка сили (фиг. 2).

- Въртящите моменти на двете сили са в една посока по оста  $O'O'$ . Резултантният въртящ момент е

$$M = M_1 + M_2 = FR_1 + FR_2 = F(R_1 + R_2) = FR$$

- Лесно се съобразява, че резултантният въртящ момент не зависи от местоположението на точка  $O$  по отсечката  $O_1O_2$ , стига оста  $O'O'$  да е перпендикулярна на равнината, в която се намират двойката сили. Може да се обобщи

$$M = FR \quad O'$$

- Въртящият момент на двойка сили е произведение от големината на силите и разстоянието между тях.

## 2. Инерционен момент. Теорема на Щайнер



- Инерционният момент на тяло е важна характеристика при изучаване на въртеливите движения. Той е мярка на за инертността на телата при въртливо движение, т.е. се явява аналог на масата при постъпателно движение. Инерционният момент е различен спрямо различните оси на въртене. Зависи от разпределението на масата спрямо оста на въртене.
- В общия случай за нееднородно тяло с неправилна форма определянето на инерционния момент е сложна задача. Тя се решава експериментално или с помощта на числени методи. За редица еднородни тела със симетрична форма инерционните моменти спрямо оста на симетрия могат да се намерят аналитично.



Нека мислено раздробим твърдото тяло на малки частици с маси

$$\Delta m_1, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_i, \dots, \Delta m_n,$$

намиращи се на разстояния съответно

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots, r_n$$

от оста на въртене.

Инерционният момент на тялото спрямо оста на въртене е

$$I = \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \quad .$$

Мерната единица за инерционен момент в SI е килограм по метър на квадрат ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ).

# Теорема на Щайнер



- Понякога е необходимо да се изчисли инерционния момент на тяло спрямо различни оси. Тези трудоемки и сложни задачи се улесняват значително с използването на теоремата на Щайнер:
- Инерционният момент на тяло спрямо произволна ос е равен на сумата от инерционния момент на тялото спрямо ос, успоредна на дадената и минаваща през центъра на масите на тялото, и произведение от масата на тялото и квадрата на разстоянието между осите

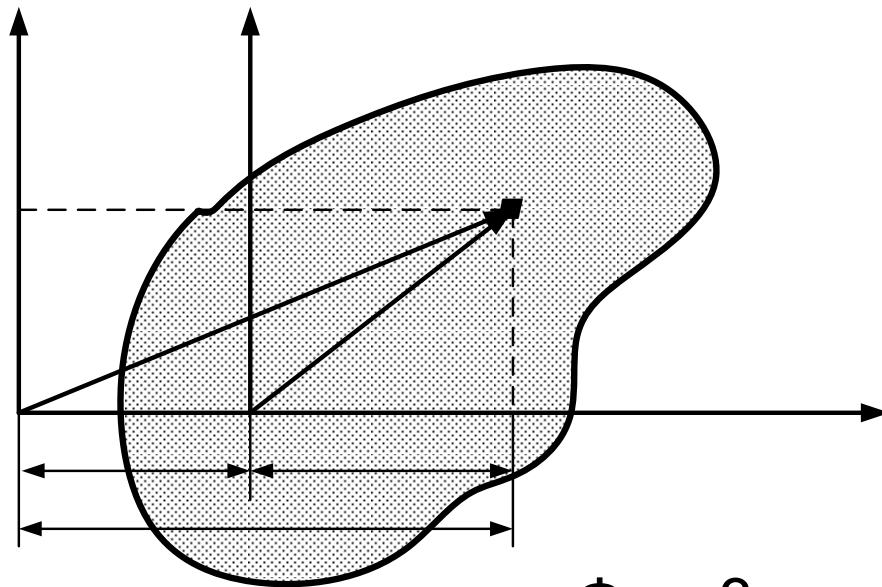
$$I = I_0 + ma^2$$

# Доказателство на теоремата



$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \sum_i [(x_i + a)^2 + y_i^2] \Delta m_i$$

$$I = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i + a^2 \sum_i \Delta m_i + 2a \sum_i x_i \Delta m_i$$



Фиг. 3

$$I_0 = \sum_i (x_i^2 + y_i^2) \Delta m_i$$

$$\sum_i \Delta m_i = m$$

$$\sum_i x_i \Delta m_i = x_0 m$$

Y'

Y



Тяло	Чертеж	Формула
Материална точка		$I_z = mr^2$
Обръч		$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_z = mr^2$
Тънък диск		$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 \quad I_z = \frac{1}{2}mr^2$
Прът		$I_z = \frac{1}{12}mr^2$
Прът		$I_z = \frac{1}{3}mr^2$
Цилиндър		$I_x = I_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) \quad I_z = \frac{1}{2}mr^2$
Втулка		$I_x = I_y = \frac{1}{12}m[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$ $I_z = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$
Куха сфера		$I_z = \frac{3}{5}mr^2 \quad I_z' = \frac{8}{5}mr^2$

10/10/2018



Тяло	Чертеж	Формула
Плътна сфера		$I_z = \frac{2}{5}mr^2$ $I_{z'} = \frac{7}{5}mr^2$
Конус		$I_x = I_y = \frac{3}{5}m\left(\frac{r^2}{4} + h^2\right)$ $I_z = \frac{3}{10}mr^2$ $I_{z'} = \frac{13}{10}mr^2$
Куб		$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6}ma^2$
Паралелепипед		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Паралелепипед		$I_{oo} = \frac{m(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{6(a^2 + b^2 + c^2)}$

10/10/2018

z  
x  
O x y



### 3. Основен закон на динамиката на въртеливото движение. Закон за запазване на момента на импулса

За описване на въртеливите движения се използва и векторната физична величина момент на импулса

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (1)$$

Моментът на импулса е равен на произведението от инерционния момент на тялото и ъгловата му скорост.

Моментът на сила е равен на скоростта, с която се изменя момента на импулса. Моментът на сила е първа производна на момента на импулса спрямо времето.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Това е основния закон на динамиката на въртеливите движения.





Като се отчете (1) се получава

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}$$

Това е друг вид на основния закон на динамиката на въртеливите движения.

Моментът на сила е равен на произведението от инерционния момент на тялото и ъгловото му ускорение.



Ако на въртящото тяло не действат външни сили, т.е. резултантният момент е равен на нулевия вектор се получава

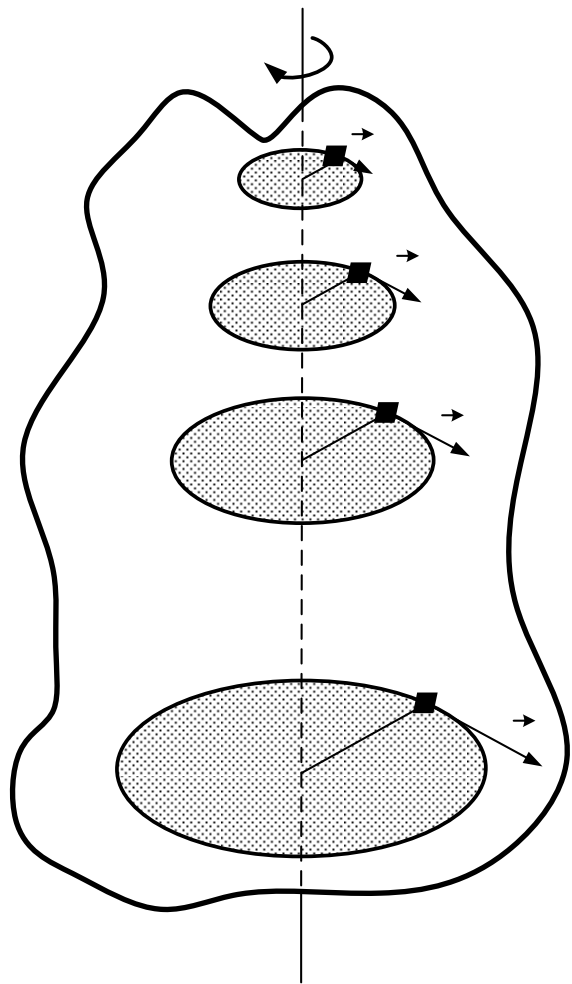
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{L} = \text{const}$$

Моментът на импулса спрямо точка на затворена система не се изменя с времето, т.е. е постоянна величина.

Изразът е закон за запазване на момента на импулса.

# 4. Кинетична енергия на въртящо се тяло



Фиг. 4

Нека твърдо тяло се върти около неподвижна ос със скорост  $\vec{\omega}$ . Мислено се разбива тялото на много малки частици с маси

$$\Delta m_1, \Delta m_2, \Delta m_3, \dots, \Delta m_i, \dots, \Delta m_n$$

Те имат скорости

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_i, \dots, v_n$$

и разстояния до оста на въртене

$$r_1, r_2, r_3, \dots, r_i, \dots, r_n$$

$$\Delta m_3$$

$$r_3$$

$$v_3$$

$$O_{ax}$$



Пълната кинетична енергия на въртящото се тяло е

$$E_k = \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \frac{\Delta m_3 v_3^2}{2} + \dots +$$
$$+ \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} + \dots + \frac{\Delta m_n v_n^2}{2}$$

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$$

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}$$

Кинетичната енергия на тяло, въртящо се около постоянна ос е полупроизведение от инерционния момент на тялото и квадрата на ъгловата му скорост.

## 5. Връзка между линейни и ъглови величини



Линейни величини	Ъглови величини
Път $s$	Ъгъл на завъртане $\varphi$
Скорост $\vec{v}$	Ъглова скорост $\vec{\omega}$
Ускорение $\vec{a}$	Ъглово ускорение $\vec{\alpha}$
Закони при равномерно праволинейно движение $v = \text{const}$ $s = vt$	Закони при равномерно въртливо движение около постоянна ос $\omega = \text{const}$ $\varphi = \omega t$
Закони при равнопроменливо праволинейно движение  $v = v_0 \pm at$ $s = v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$ $v^2 = v_0^2 \pm 2as$ $s = \frac{v_0 \pm v}{2} t$	Закони при равнопроменливо въртливо движение около постоянна ос  $\omega = \omega_0 \pm \alpha t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\varphi$ $\varphi = \frac{\omega_0 \pm \omega}{2} t$



Линейни величини	Ъглови величини
Сила $\vec{F}$	Въртящ момент $\vec{M}$
Маса $m$	Инерционен момент $I$
Импулс $\vec{p}$	Момент на импулса $\vec{L}$
Закони на динамиката $\vec{F} = \vec{0}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$	$\vec{M} = \vec{0}$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ $\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}$
Работа $A = \vec{F} \cdot \vec{r}$	$A = \vec{M} \cdot \vec{\varphi}$
Мощност $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
Кинетична енергия $E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$