Хармонично трептеливо движение – кинематични и динамични величини.

Енергия на хармонично трептяща точка

1. Хармонично трептеливо движение. Основни кинематични величини
2. Динамика на хармонично трептеливо движение
   а) Пружинно махало
   б) Математическо махало
3. Енергия на хармонично трептяща точка
   а) Кинетична енергия на хармонично трептяща точка
   б) Потенциална енергия на хармонично трептяща точка
   в) Пълна механична енергия на хармонично трептяща точка

1. Хармонично трептеливо движение. Основни кинематични величини

Трептенията са движения, които се характеризират с определена повторяемост във времето. Според физичната си същност трептенията са най-разнообразни: механични – трептения на тяло, закачено на пружина; на математическо махало, на физическо махало, на струна; електромагнитни – трептения на електрически трептящ кръг. Въпреки разнообразието си всички се подчиняват на еднакви закономерности, могат да се опишат с едни и същи характеристики и уравнения.

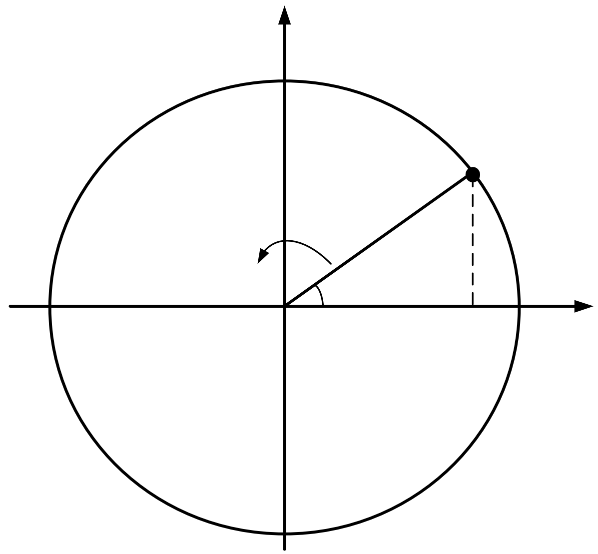
Ако в една система получи първоначална енергия и след като започне да извършва трептенията върху нея отсъстват външни въздействия, трептенията ѝ се наричат свободни или собствени.

Най-простият тип свободни трептения са хармоничните – трептения, при които трептящата величина се изменя по синусов или косинусов закон.

Изучаването на хармонични трептения е важно по две причини:

- Много трептения в техниката и в природата са близки до хармоничните.
- Различните трептящи процеси могат да се представят като съвкупност от хармонични трептения.

Пример за хармонично трептяща точка е проекцията върху оста *x* на материална точка, движеща се равномерно по окръжност с ъглова скорост . Координатната система е в равнината на окръжносттра, а точка О съвпада с центъра на окръжността. Радиусът на окръжността е *A* – фиг. 4.1.



Уравнението на хармонично трептя-
ща точка е $x = A\cos(\omega 0t + \varphi 0)$,

където x е елонгация (отклонение) на хармоничната трептяща точка от равновесно положение, A – амплитуда, ω_0 - кръгова честота, φ_0 – начална фаза, $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза.

Тъй като косинус е функция, заемаща стойности в интервала $\cos \varphi$ Є [-1; 1], то отклонението приема стойности в интервала x Є [-A; A].

Да допълним и останалите характеристики на хармоничното трептене:

Период T – времето, за което системата извършва едно пълно трептене. Мерната му единица е секунда (s).

Честота ν – броят на трептенията за единица време. Мерната й единица е херц (Hz).

$$\nu = 1/T \qquad \omega_0 = 2\pi\nu$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Закон за скоростта на хармонично трептяща точка

Скоростта е първа производна на

елонгацията по времето $v = \dfrac{dx}{dt}$. От (1) се получава

$$v = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Закон за ускорението на хармонично трептяща точка

Ускорението е първа производна на скоростта по времето и втора производна на елонгацията по времето

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

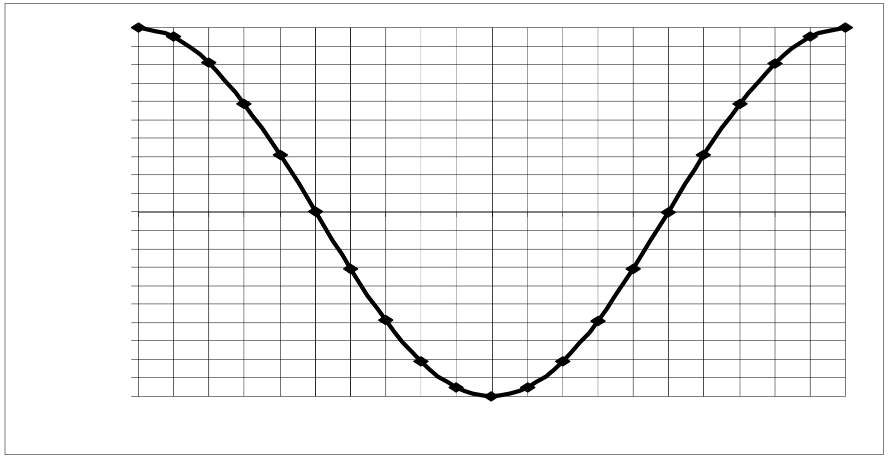
От (5) се получава

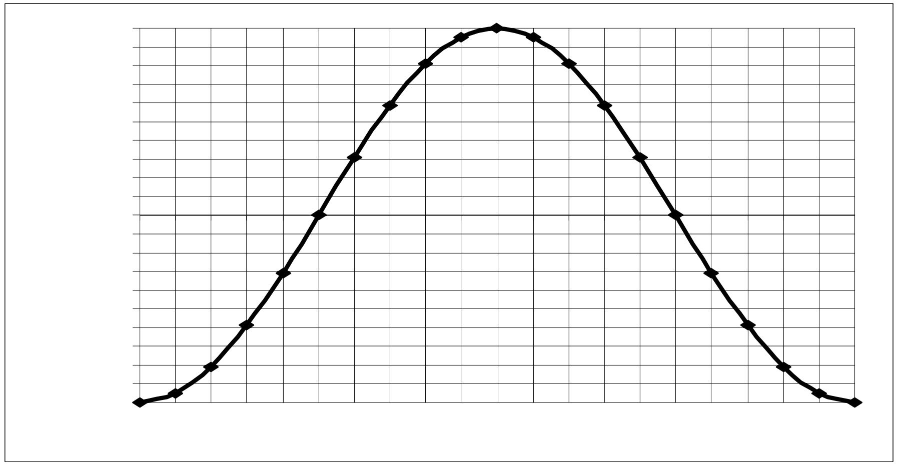
$$a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

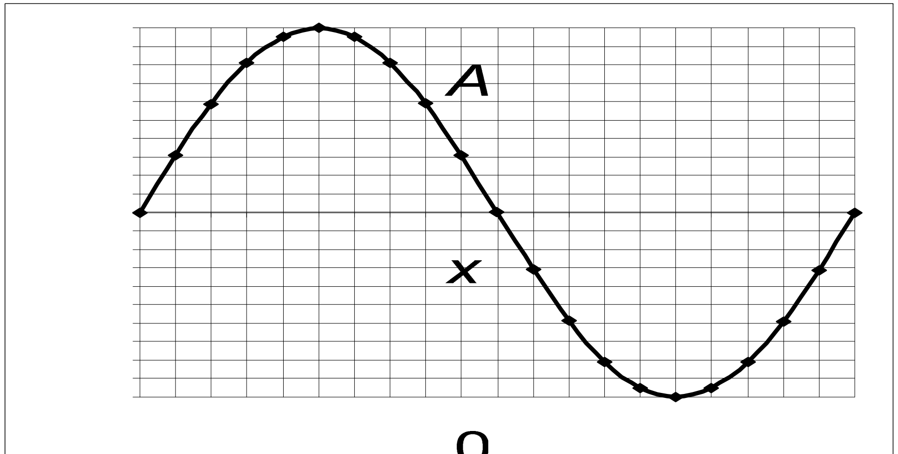
Графично представяне на хармонични трептения

Представени графики на зависимостите $x = x(t)$, $v = v(t)$ и $a = a(t)$ за хармонично трептяща точка с уравнение

$x = A\cos(\omega_0 t)$. Началната й фаза е нула.







От представените графични зависимости следва:

- Фазата на скоростта изостава с π/2 rad от фазата на елонгацията.
- Фазата на ускорението и елонгацията са в противофаза.

O

T/4 *T/2* *3T/4* *T* *t*

Диференциално уравнение на хармонично трептяща точка

$$a = -\omega_0^2 x \qquad\qquad a = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Нарича се диференциално уравнение на хармонично трептяща точка.

Много често диференциалното уравнение на хармонично трептящата точка се използва за определяне на характеристики на конкретни трептения.

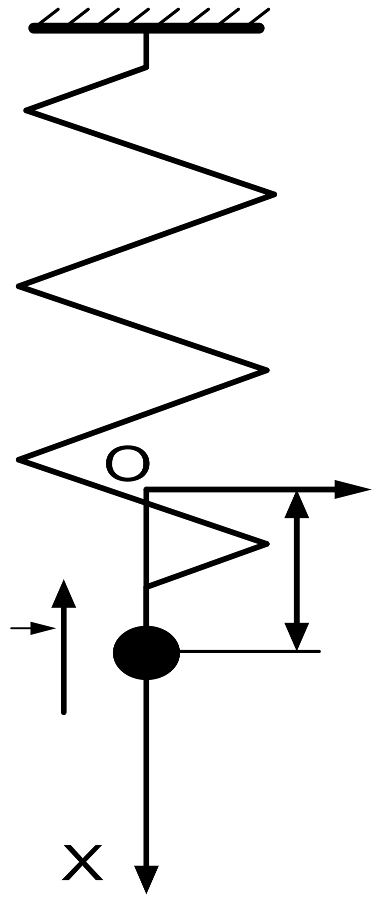
Динамика на хармонично трептеливо движение
а) пружинно махало

В долния край на абсолютно еластична окачена пружина се поставя тяло с маса *m* (фиг. 4.3) и след извеждане от равновесно положение тялото започва да извършва хармонични трептения под действието на еластична сила

$$F = -kx\,,$$

където *k* е коефициент на еластичност.

Знакът (-) показва, че еластичната сила винаги е насочена в посока, обратна на елонгацията.



Диференциалнотто уравнение на пружинното махало (12) се сравнява с диференциалното уравнение на хармонично трептяща точка в общ вид и за кръговата честота на тяло, окачено на пружина и извършващо хармонично трептене се получава

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

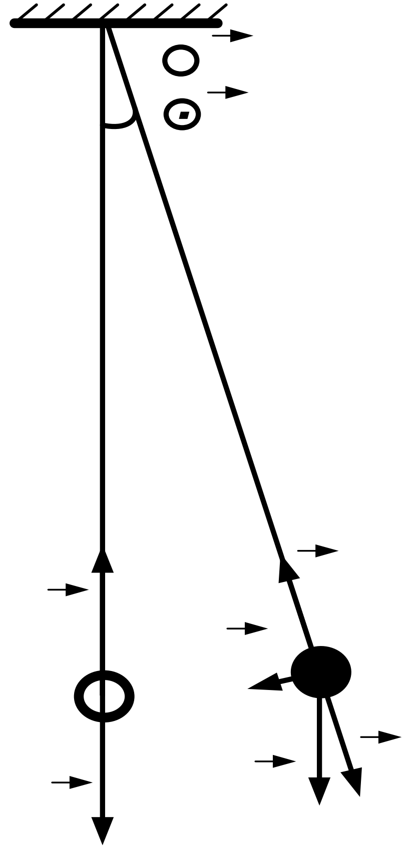
а изразът за периодът му е

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Формулата за пружинно махало са верни за сравнително малки отклонения от равновесно положение ($x << \ell$) и когато масата на пружината е много по-малка от масата на тялото ($m_{пр} << m$).

Математическо махало

Математическото махало представлява идеализирана система, състояща се от тяло с маса m, окачено на безтегловна и неразтеглива нишка (фиг. 4.4). Дължината на махалото е ℓ. Действат му сила на тежестта и сила на опъване на нишката . В равновесно положение на махалото тези сили се уравновесяват. Когато махалото се отклони на някакъв ъгъл φ, резултантната сила, действаща на махалото е тангенциалната компонента на силата на тежестта . Тя създава въртящ момент в посока, обратна на ъгъла на завъртане .



Посоката се определя по следният начин: векторът е перпендикулярен на равнината която се люлее махалото и ако гледаме срещу него силата трябва да се стреми да завърта махалото в посока, обратна на часовата стрелка. В разгледания пример посоката на е от нас към равнината на чертежа и се отбелязва с . За ъгъла на завъртане на махалото посоката е от чертежа към нас и се отбелязва с . Векторите и са в противоположни посоки. Създаденият въртящ момент се стреми да върне махалото в равновесно положение, т.е. играе роля на връщаш въртящ момент. Аналогичен случай се получава, ако махалото се отклони наляво.

Да приложим основния закон на на динамиката на въртеливите движения

$$I\alpha = M$$

където M е въртящ момент, I - инерционен момент, α - ъглово ускорение,

към разглеждания случай.

Инерционният момент на материална точка с маса m, намираща се на разстояние от оста на въртене се дава с израза

$$I = m\ell^2$$

а по дефиниция

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

За въртящия момент, създаден от силата може да се запише $M = -G_\tau \ell = -mg\ell \sin\varphi$

При малки ъгли $\sin\varphi \approx \varphi$ или $M = -mg\ell\varphi$

Знакът (-) отчита, че и са в противоположни посоки. След заместване на изразите за *I*, *α* и *M* в (15) се получава

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

(20) е диференциално уравнение на математическо махало.

Диференциалното уравнение на хармонично трептяща точка, написано за трептящата величина *φ* е

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Енергия на хармонично трептяща точка

а) Кинетична енергия на хармонично трептяща точка

Кинетичната енергия на тяло се дава с формулата

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

и при отчитане на (5) се получава

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

При максимално отклонение на пружинното махало кинетичната енергия на хармонично трептящата точка е нула, а при равновесно положение се получва максимална стойност на кинетичната енергия

$$E_{k\,max} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$$

б) Потенциална енергия на хармонично трептяща точка

Потенциалната енергия на тяло се дава с формулата

$$E_p = \frac{kA^2}{2}$$

и при отчитане на (1) се получава

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

При максимално отклонение на пружинното махало потенциалната енергия има максимална стойност ,

$$E_{p\,max} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$$

а при равновесно положение се получва минимална стойност на потенциалната енергия $E_p = 0$.

в) Пълна механична енергия на хармонично трептяща точка

Пълната механична енергия на едно тяло е сума от кинетичната и потенциалната му енергия

$$E = E_k + E_p$$

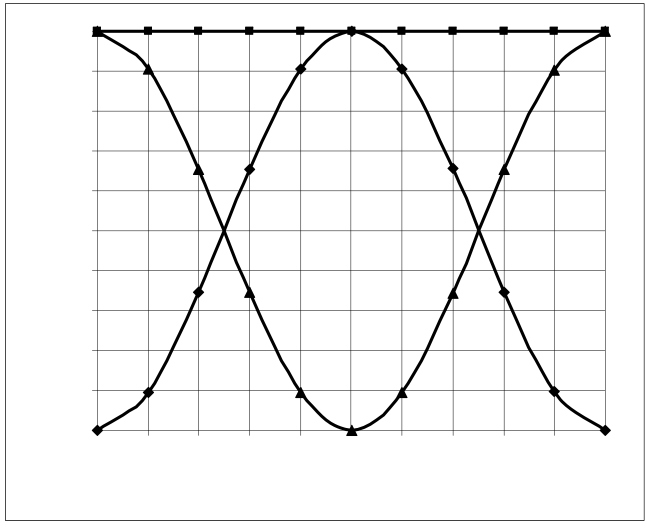
и след отчитане на (4.24) и (4.26) се получава

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$$

От (28) може да се направи следното заключение:

Пълната механична енергия на хармонично трептяща точка не се променя с времето (остава постоянна). Енергията на хармонично трептяща точка постепенно преминава от потенциална в кинетична и обратно.

На фиг. 4.5 са представени зависимостите $Ek = Ek(t)$, $Ep = Ep(t)$ и $E = E(t)$ на математическо махало за един полупериод. В началния момент от време то има максимално отклонение и потенциалната му енергия е максимална $Epmax = E$, а кинетичната му енергия е $Ek = 0$. След това потенциалната енергия на махалото намалява, а кинетичната му нараства. В момента от време $t = T/4$ махалото има само кинетична енергия $Ekmax = E$, а поотенциалната му енергия е нула. В интервала от време T Є [T/4; $T/2$] картината се повтаря, но е в обратна посока – кинетичната му енергия намалява до 0, а потенциалната му енергия достига до максимална стойност.



Затихващи и принудени трептения. Резонанс

1. Свободни затихващи трептения
2. Принудени трептения
3. Резонанс
4. Резонанс по напрежение

1. Свободни затихващи трептения

При свободни затихващи трептения, каквито са хармоничните, се отчита само действието на еластичната (връщащата) сила. В техните трептения обаче винаги действат и сили на триене и съпротивление, които винаги са насочени в посока, противоположна на скоростта на трептящата точка. Те зависят по сложен начин от големината на скоростта й, но с достатъчно голяма скорост може да се запише

$$F_k = -rv\ ,$$

където r се нарича коефициент на съпротивление.

Съгласно втория закон на Нютон за трептящата материална точка може да се запише

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F + F_k$$

Заместват се *F* и *Fk* с техните равни като се отчете, че

$$v = \frac{dx}{dt}$$

се получава

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

където $\beta = \frac{r}{2m}$ е коефициент на затихване.

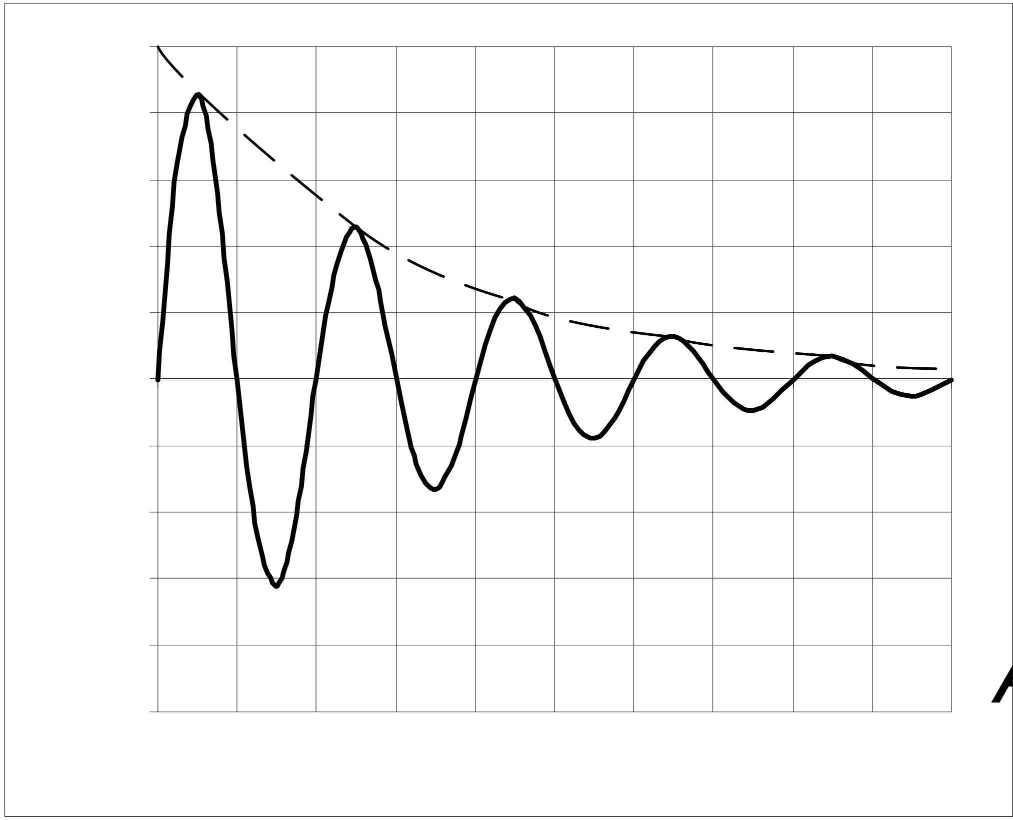
(31) е диференциално уравнение на свободни затихващи трептения.

Решението му е

$$x = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

където $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

На фиг. 4.6 е представено свободно затихващо трептение при $\varphi 0 = 0$ и $\beta < \omega_0$. Колкото по голям е коефициентът на затихване β, толкова по-бързо ще затихнат трептенията.



A

Амплитудата на трептенията намалява по експоненциален закон. За характеризиране на намаляването се използва величината логаритмичен декремент на затихване

$$\lambda = ln\left(\frac{A_t}{A_{t+T}}\right)$$

Логаритмичният декремент на затихване е равен на натурален логаритъм от отношението на две последователни амплитуди.

След несложни преобразования се получава

$$\lambda = \beta T$$

Логаритмичният декремент на затихване λ е величина, която лесно се поддава на измерване. Ако се измери и периодът T на свободните затихващи трептения, може да се изчисли коефициентът на затихване и коефициентът на съпротивление r.

2. Принудени трептения

Принудени трептения се наричат незатихващи трептения на дадена система, предизвикани и поддържани от действието на периодически изменяща се сила .

Най-прост е случая, когато силата се изменя по синусов или косинусов закон

$$F = F_0 \cos(\omega t)$$

Уравнението на движение съгласно втория закон на Нютон е

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - rv + F_0 \cos(\omega t)$$

За диференциалното уравнение на принудените трептения се получава

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

където $f_0 = \frac{F_0}{m}$.

Законът за елонгацията на трептящата точка е $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

Амплитудата на материална точка, извършваща хармонични трептения се дава с израза

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

3. Резонанс

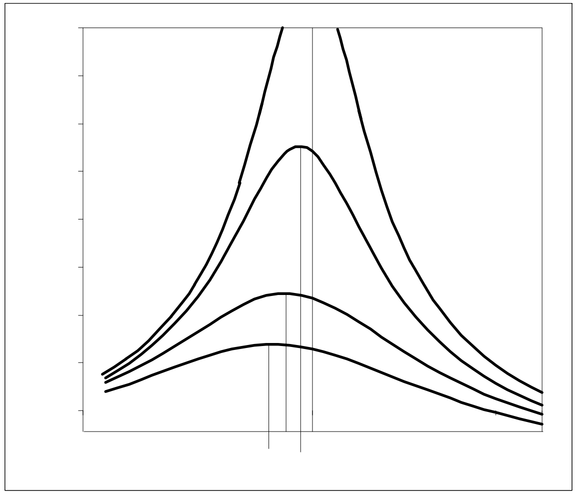
- От (39) се вижда, че амплитудата на принудените трептения зависи от честотата на действащата периодична сила и от коефициента на затихване. Честотата на периодичната сила, за която амплитудата има максимална стойност, се начича резонансна честота, а явлението – резонанс. В този случай амплитудата на хармоничното трептение се увеличава многократно.
- Може да се намери при каква стойност на ω знаменателя в (39) има минимум, т.е. амплитудата е максимална. Правят се следните стъпки. Намира се производната по ω на знаменателя в (39) и се приравнява на 0. От полученото уравнение се определя резонансната честота

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

След заместване в (39) се определя резонансната амплитуда

$$A_{rez} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

На фиг. 4.7 е дадена зависимостта за система, извършваща периодични трептения за коефициенти на затихване β_1, β_2 и β_3 ($\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$). Максимумите на амплитудата съответстват на резонансната честота ω_{rez}. Тя винаги е по-малка от собствената честота на системата ω_0. Колкото коефициентът на затихване β е по-малък, толкова резонансната честота ω_{rez} става по-близка до собствената честота на системата ω_0.



Освен това с намаляване на коефициента на затихване се увеличава резонансната амплитуда, т.е. трептенията стават с все по-голяма и по-голяма амплитуда. При $\beta = 0$ резонансната кръгова честота е $\omega_{rez} = \omega_0$, а амплитудата – $A_{rez} \to \infty$. Това на практика не се получава. При много малки стойности на β се разрушава системата. Отчетохме, че колкото β е по-малко, толкова резонансната амплитуда е по-голяма или се казва, че системата е по-доброкачествена. За количествена оценка на доброкачествеността на една система се въвежда коефициент на доброкачественост Q. Той показва колко пъти максималната еластична сила или в общия случай, връщащата сила е по голяма от максималната съпротивителна сила

$$Q = \frac{F_{max}}{F_{k\,max}}$$

$$F_{max} = kx_{max} = m\omega_0^2 A$$

$$F_{k\,max} = rv_{max} = r\omega_0 A$$

$$Q = \frac{m\omega_0}{r}$$

Уравнение на линейна и сферична вълна. Характеристики на вълните

1. Вълнови процеси. Надлъжни и напречни вълни
2. Уравнение на линейна и сферична вълна
3. Стоящи вълни
4. Резонанс по напрежение

1. Вълнови процеси. Надлъжни и напречни вълни

Трептенията, възбудени в произволна точка от дадена среда (твърда, течна или газообразна) се разпространяват в нея с крайна скорост, зависеща от свойствата на средата като се предават от една нейна точка на друга. Колкото по-далеко от източника на трептения е разположена разглежданата частица, толкова по-късно започва да трепти. При изучаване на вълните се правят следните опростяващи предположения:

- Средата, в която се разпространяват трептенията е непрекъсната, т.е. има равномерно разпределение на материята в пространството.
- Средата има еластични свойства.

Процесът на разпространение на трептенията в пространството се нарича вълнов процес (вълна). Частиците от средата не се движат заедно с вълната, а трептят около средните си равновесни положения. От частица на частица се се предава състояние на трептеливо движение, а също така и енергия. Основното свойство на вълните е , че те предават енергия без да пренасят вещество.

Еластични вълни са механични трептения, които се разпространяват в еластична среда. Те биват надлъжни и напречни. При надлъжните вълни частиците трептят в направление на разпространение на вълната, а при напречните – в равнини, перпендикулярни на посоката на разпространение на вълната.

Надлъжните вълни се разпространяват в еластични среди, за които еластичните сили възникват при деформации на едностранно опъване и свиване, а напречните – в среди, за които възникват еластични сили и при деформации на хлъзгане. Следователно в течности и газове възникват само надлъжни вълни, а в твърди тела – надлъжни и напречни вълни.

Когато частиците от вълната трептят по синусов или косинусов закон, еластичните вълни се наричат хармонични.

Основните характеристики на еластичните вълни са:

- **дължина на вълната** λ – разстоянието между най-близките две частици, трептящи с еднакви фази. Между дължината на вълната и скоростта й съществуват зависимостите

$$\lambda = vT ,$$

$$v = \lambda\nu .$$

Разпространявайки се от източника на трептения, вълновият процес обхваща все нови и нови области от пространството.

- фронт на вълната – геометричното място на точки, до които достигат трептенията в даден момент от време.
- вълнова повърхност - геометричното място на точки, които трептят с еднаква фаза.

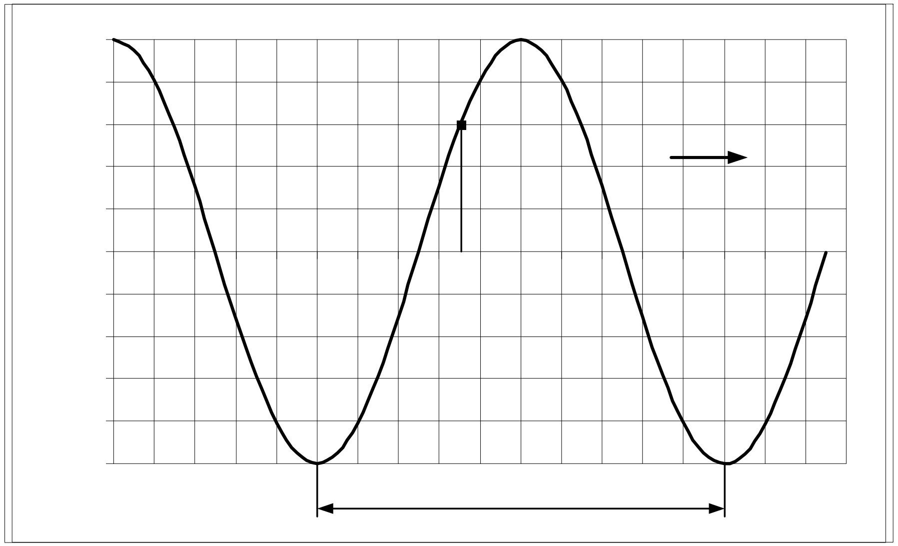
В даден момент от време съществуват безброй много вълнови повърхности, а вълновия фронт е само един.

Когато вълновите повърхноси са успоредни повърхнини, вълните се наричат линейни (плоски), а когато са концентрични сфери – сферични.

2. Уравнение на линейна и сферична вълна

Вълни, които пренасят енергия в пространството, са бягащи вълни. Уравнени на бягаща вълна е зависимостта на отлонението ξ на трептящите точки от координатите и времето t – $\xi = \xi(,t)$.

Нека линейна синусоидална вълна се разпространява в пространството. Оста OX съвпада с посоката на скоростта на вълната (фиг. 4.10). Вълновите повърхности са перпендикулярни на оста и всички точки, намиращи се в дадена вълнова повърхност, трептят по един и същ начин. Следователно отклонението зависи само от координатата x и времето t - $\xi = \xi(x, t)$.



Нека частицата, разположена в точка В, се намира на разстояние x от точка О (източника на трептения). Да намерим уравнението на трептениата й.

Трептенията на точките, лежащи в равнината $x = 0$ се описва с израза

$$\xi(0, t) = A\cos(\omega t).$$

Точка В от средата трепти по същия начин, но трептенията и изостават спрямо трептенията на източника с време τ.

Уравнението на трептенията на частиците, лежащи в равнината $x = x$ (включително и точка В) добива вида

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - \tau).$$

Отчита се , че $\tau = \dfrac{x}{v}$ и се получава

$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - \dfrac{x}{v})$ при $\varphi_0 = 0$.

В общия случай $\varphi_0 \neq 0$.

Следователно

$$\xi(x, t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0]$$

(4.57) е уравнение на линейна (плоска) бягаща вълна.

От (4.57) следва, че вълновия процес е периодичен в пространството и времето.

Ако линейната вълна се разпространява в обратна посока, то уравнението й е

$$\xi(x, t) = A\cos[\omega(t + \frac{x}{v}) + \varphi_0]$$

За характеристика на синусоидалната вълна се използва вълновото число *k*, което се определя с израза

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \lambda = vT$$

$$\omega = 2\pi\nu \qquad k = \frac{\omega}{v}$$

При отчитане на получената връзка уравнението добива вида

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx) + \varphi_0] \;.$$

Ако се предположи, че при вълновия процес фазата е постоянна

$$\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0 = \text{const}$$

и се диференцира по *t* се получава

$$\frac{dx}{dt}=v$$

Следователно скоростта *v* на разпространение на вълната е равна на скоростта $\frac{dx}{dt}$, с която се разпространява фазата на вълната.

По аналогичен начин за сферична синусоидална вълна се получава

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr) + \varphi_0]$$

където r е разстоянието на разглежданата частица до източника на вълната.

От (4.64) следва, че при сферична вълна дори и средата да не е поглъщаща, амплитудата на трептенията намалява и е обратнопропорционална на r. Уравнението (4.11) е в сила само когато разстоянието е значително по-голямо от размерите на източника на вълни, т.е. в този случай той може да се приеме за точков.

Фазовата скорост на хармонична вълна се определя с израза $v = \dfrac{\omega}{k}$ или фазовата скорост на хармонична вълна зависи от честотата. Явлението се нарича дисперсия на вълната, а средата, в която се наблюдава дисперсията, е диспергираща.

Вълново уравнение на плоска вълна

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

То е частно диференциално уравнение от втори ред.

3. Стоящи вълни

Стояща вълна се получава при наслагване на две еластични хармонични вълни, разпространяващи се в противоположни посоки и притежаващи еднакви честоти и амплитуди.

Нека вълните се разпространяват в направление на оста OX – едната в положителната й посока, а другата – в отрицателната й посока.

Приема се, че началните фази на двете вълни са

$\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$.

Уравненията за елонгацията имат вида

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

$$\xi_2 = A\cos(\omega t - kx)$$

Резултантната елонгация е

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$\xi = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

Отчита се, че $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ и се получава

$$\xi = 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda})\cos(\omega t)$$

(4.73) е уравнение на стояща вълна.

Честотата на стоящата вълна е равна на честотата на изходните вълни, а амплитудата й е

$$A' = \left| 2A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda}) \right|$$

Амплитудата зависи от координатата x на разглежданата точка.

Амплитудата зависи от координатата x на разглежданата точка.

За точки от средата, за които е изпълнено условието $\dfrac{2\pi x_{вър}}{\lambda} = m\pi$ амплитудата на стоящата вълна достига максимална стойност $A'_{max} = 2A$. Тези точки се наричат върхове на стоящата вълна. Координатите на върховете са $x_{вър} = m\dfrac{\lambda}{2}$

За точки от средата, за които е изпълнено условието $\dfrac{2\pi x_{въз}}{\lambda} = (m + \dfrac{1}{2})\pi$ амплитудата на стоящата вълна е A'_{min} = 0. Тези точки се наричат възли на стоящата вълна.Координатите на възлите са $x_{въз} = (m + \dfrac{1}{2})\dfrac{\lambda}{2}$

От формулата се вижда, е разстоянието между два съседни върха или два съседни възела са еднакви и са равни на $\lambda/2$.

Точките между два съседни възела трептят с еднакви фази, но с различни амолитуди. Между следващите два възела всички точки трептят с противоположни фази на точките, намиращи се между предишните два възела.

Най-лесно стояща вълна може да се получи при отразяване на еластична хармонична вълна от преграда и последващо наслагване на вълната с отразената вълна. Ако плътността на отразяващата среда е по-малка от тази на средата, в която се разптостраняват вълните се получава врьх на стоящата вълна на граничната повърхност, а ако е по-голяма – възел.