РЕШЕНИ ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА

ПО ВИСША МАТЕМАТИКА - I

Задача 1. Дадени са комплексните числа $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = 1 + i$. Пресметнете $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение: Знаем, че $i^2 = -1$. Следователно имаме:

$$z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + i) = 2 + 2i - 3i - 3i^2 = 2 - i - 3(-1) = 5 - i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + i} = \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i - 3i - 3}{1 + 1} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

Задача 2. Представете в тригонометричен вид числата

$$3,\ -4,\ i,\ 5i,\ -i,\ -3i.$$

Решение: Положителните реални числа имат аргумент 0, отрицателните реални числа имат аргумент π. Чисто имагинерните числа с положителна имагинерна част имат аргумент $\frac{\pi}{2}$, а чисто имагинерните числа с отрицателна имагинерна част имат аргумент $\frac{3\pi}{2}$. Следователно:

$$3 = 3(\cos 0 + i \sin 0) \qquad -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad 5i = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$$

$$-i = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right) \qquad -3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

Задача 3. Представете в тригонометричен вид числата

а) $1 + i$ б) $-3 + 3i$ в) $1 - i$ г) $-2 - 2i$

Решение:

а) За да напишем тригонометричния вид на комплексното число $z = 1 + i$ трябва да пресметнем неговия модул и аргумент. Числото $z = 1 + i$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

От условието $tg\, \theta = \frac{y}{x} = 1$ не можем да определим еднозначно аргумента θ, но тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \quad 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

б) Числото $z=-3+3i$ има реална част $x=-3$ и имагинерна част $y=3$. Следователно

$$r=\sqrt{(-3)^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$tg\,\theta=-1$ и тъй като числото лежи във втори квадрант, следва че $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad -3+3i=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

в) Числото $z=1-i$ има реална част $x=1$ и имагинерна част $y=-1$. Следователно

$$r=\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$tg\,\theta=-1$ и тъй като числото лежи в четвърти квадрант, следва че $\theta=\dfrac{7\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

г) Числото $z=-2-2i$ има реална част $x=-2$ и имагинерна част $y=-2$. Следователно

$$r=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

$tg\,\theta=1$ и тъй като числото лежи в трети квадрант, следва че $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad -2-2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Задача 4. Каква е кратността на $a=2$ за полинома $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$?

Решение: Прилагаме схемата на Хорнер, докато получим остатък, различен от нула.

	1	−5	7	−2	4	−8
a= 2	1	−3	1	0	4	**0**
a= 2	1	−1	−1	−2	**0**	
a= 2	**1**	**1**	**1**	**0**		
a= 2	1	3	7			

Следователно $a=2$ е **трикратна нула** на полинома и

$$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=(x-2)^3(x^2+x+1)$$

Задача 5. На сума от какви елементарни дроби се разлага функцията $\dfrac{x^3+2}{(x-1)^2(x^2+1)}$?

Решение:

Дробта е правилна, защото полиномът в знаменателя е от четвърта степен, а в числителя от трета. Тъй като знаменателят е разложен на един линеен множител на втора степен и един квадратен тричлен на първа степен, то дробта се разлага на сума от две елементарни дроби от първи вид и една от втори вид.

$$\frac{x^3+2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Задача 6. На сума от какви елементарни дроби се разлага функцията $\dfrac{2x^2-11}{(x^2-16)(x^2+x+1)}$?

Решение:

Дробта е правилна, защото полиномът в знаменателя е от четвърта степен, а в числителя от втора.

$$\frac{2x^2-11}{(x^2-16)(x^2+x+1)} = \frac{2x^2-11}{(x-4)(x+4)(x^2+x+1)}$$

Тъй като знаменателят е разложен на два линейни множителя и един квадратен тричлен на първа степен, то дробта се разлага на сума от две елементарни дроби от първи вид и една от втори вид.

$$\frac{2x^2-11}{(x^2-16)(x^2+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

Задача 7. Намерете произведението на матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1+(-2).4+2.0 & 1.(-2)+(-2).(-1)+2.3 \\ 0.1+1.4+3.0 & 0.(-2)+1.(-1)+3.3 \\ (-1).1+2.4+2.0 & (-1).(-2)+2.(-1)+2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Произведението на две матрици $A.B$ е дефинирано само тогава, когато броят на стълбовете на първата матрица A е равен на броя на редовете на втората матрица B. Елементите на произведението на две матрици се получават като се **умножават редовете на първата матрица със стълбовете на втората**.

Задача 8. Пресметнете стойността на детерминантата $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение: Развиваме по елементите на първи ред и получаваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5. \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\left(-2\begin{vmatrix} -0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 5(-2.(-2) - 1.(-6) + 3(-1)) = 5.(4 + 6 - 3) = 5.7 = 35$$

Задача 9. Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(2, -1, 2)$ и $\overrightarrow{b}(5, -3, 2)$. Пресметнете $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Решение: 1. Скаларното произведение е

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 2.5 + (-1)(-3) + 2.2 = 10 + 3 + 4 = 17$$

2. Векторното произведение е

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} = 4\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}.$$

Задача 10. Да се намери пробода M на правата $g : \begin{cases} x = \ 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = \ 2 - 2t \end{cases}$ с равнината $\alpha : \ x + 2y - z - 12 = 0$.

Решение: Координатите на прободната точка са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} x = \ 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = \ 2 - 2t \\ x + 2y - z - 12 = 0 \end{array} \right.$$

Заместваме $x = 2 + 3t, \ \ y = -1 + t, \ z = 2 - 2t$ в уравнението на равнината и получаваме

$$2 + 3t + 2(-1 + t) - (2 - 2t) - 12 = 0$$

$$7t - 14 = 0 \qquad \text{или} \qquad t = 2.$$

Заместваме $t = 2$ в уравненията на правата и получаваме координатите на пробода $x = 2 + 3.2 = 8$, $y = -1 + 2 = 1$, $z = 2 - 2.2 = -2$, т.е. $M(8, 1, -2)$.

Задача 11. Напишете уравнението на правата g, определена от точките $A(1, -5)$ и $B(4, 2)$.

Решение: Уравнението на правата е

$$g : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

където x_0 и y_0 са абсцисата и ординатата на точка от правата, а a и b са координатите на направляващ вектор на правата.

Направляващият вектор на правата е $\overrightarrow{AB}(3, 7)$ (*от координатите на втората точка B изваждаме съответните координати на първата точка A*). Следователно

$$g : \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 5}{7} \Longleftrightarrow 7x - 7 = 3y + 15 \Longleftrightarrow 7x - 3y - 22 = 0$$

Задача 12. Намерете разстоянието d от точката $M(2, -3)$ до правата $g : 3x + 4y - 29 = 0$.

Решение:
Разстоянието d от точката $M_0(x_0, y_0)$ до правата $g : ax + by + c = 0$ се пресмята с формулата

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Следователно

$$d = \frac{|3.2 + 4.(-3) - 29|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 - 12 - 29|}{\sqrt{25}} = \frac{|-35|}{5} = \frac{35}{5} = 7$$