

ТИПОВИ ЗАДАЧИ ПО ВМ-I

(за оценка "среден")

1. Да се намери произведението на две комплексни числа (разкриваме скобките, като умножаваме "всяко с всяко" и помним, че $i^2 = -1$):

1.1 $(2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i + 3(-1) = -1 + 5i$

1.2 $(3 + 4i)(4 - i)$ отг. $16 + 13i$

1.3 $(5 - 3i)(2 - 5i)$ отг. $-5 - 31i$

2. Да се намери произведението две матрици (умножаваме по правилото "ред по стълб"):

2.1
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 отг. $\begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 6 & 15 & 2 \end{pmatrix}$

2.3
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 отг. $\begin{pmatrix} 11 & -11 & 2 \\ -1 & 14 & -4 \end{pmatrix}$

3. Да се реши линейна система от две уравнения с две неизвестни чрез формулите на Крамер $\left(x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}\right)$:

3.1
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 = -8 \end{cases}$$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 16 = 10$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6$$

Следователно: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{2} = -3$

3.2
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases} \quad \text{отг. } x_1 = -2, \quad x_2 = 3$$

3.3
$$\begin{cases} 5x - 2y = 30 \\ 2x + y = 21 \end{cases} \quad \text{отг. } x = 8, \quad y = 5$$

4. Намерете скаларното и векторното произведение на два вектора:

4.1 $\vec{a}(2, -1, 2)$ и $\vec{b}(6, -3, 2)$

Решение: 1. Скаларното произведение е:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 12 + 3 + 4 = 15 + 4 = 19$$

2. Векторното произведение е:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 8\vec{j}.$$

4.2 $\vec{a}(3, -1, -2)$ и $\vec{b}(2, -3, 1)$ отг. 7, (-7, -7, -7)

4.3 $\vec{a}(5, 2, 3)$ и $\vec{b}(2, 4, -7)$ отг. -3, (-26, 41, 16)

5. Уравнение на равнина по зададени точка от равнината и нормален вектор ($\alpha : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$):

5.1 Да се напише уравнението на равнина α , която минава през точката $A(3, -3, 1)$ и е перпендикулярна на вектора $\vec{a}(2, -1, -2)$.

Решение: Равнината е определена от точката $A(3, -3, 1)$ и нормален вектор $\vec{N}_\alpha = \vec{a}(2, -1, -2)$. Следователно уравнението на равнината е

$$\alpha : 2(x - 3) - (y + 3) - 2(z - 1) = 0 \quad \text{или} \quad 2x - y - 2z - 7 = 0.$$

5.2 Да се напише уравнението на равнина α , която минава през точката $A(2, 3, -5)$ и $\vec{N}_\alpha(3, -5, 2)$ отг. $3x - 5y + 2z + 19 = 0$

5.3 Да се напише уравнението на равнина α , която минава през точката $A(-1, -2, 7)$ и $\vec{N}_\alpha(5, 3, 2)$ отг. $5x + 3y + 2z - 3 = 0$

6. Напишете уравнението на права линия, определена от две точки $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ $\left(g : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \right)$

6.1 $A(5, 3)$, $B(7, 8)$

Решение: Намираме координатите на вектор $\overrightarrow{AB}(2, 5)$, като от координатите на втората точка извадим съответните координати на първата точка, т.е. $\overrightarrow{AB}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Следователно:

$$g : \frac{x - 5}{2} = \frac{y - 3}{5} \iff 5(x - 5) = 2(y - 3) \iff 5x - 2y - 19 = 0$$

6.2 $A(5, -2)$, $B(9, 3)$

отг. $5x - 4y - 33 = 0$

6.3 $A(-1, 3)$, $B(2, -2)$

отг. $5x + 3y - 4 = 0$