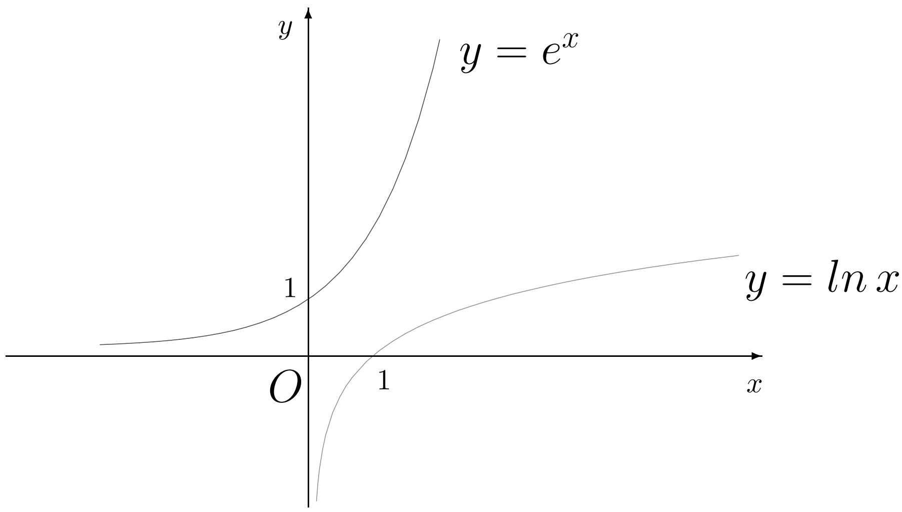
РУМЕН НИКОЛОВ ДАСКАЛОВ

ЕЛЕНА МЕТОДИЕВА ДАСКАЛОВА

В И С Ш А   М А Т Е М А Т И К А

ЧАСТ II



Диференциално и интегрално смятане

Габрово, 2015

Автори: Авторите са преподаватели в катедра "Математика" на Технически университет - Габрово

проф. дмн Румен Николов Даскалов е завършил ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски". Защитил е докторат в областта на комбинаторната теория на кодирането. Член е на American Mathematical Society (AMS), The Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) и Съюз на математиците в България (СМБ).

доц. д-р Елена Методиева Даскалова е завършила ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски". Защитила е докторат в областта на комбинаторната теория на кодирането.

В И С Ш А   М А Т Е М А Т И К А, Част II,

Учебник за студенти от инженерно-технически специалности.

Четвърто издание, 94 стр.

ПРЕДГОВОР

Учебникът “Висша математика“, част II, е предназначен за студенти от Технически университет - Габрово с образователно-квалификационна степен “бакалавър“.

Основна цел на авторите е била да се намери необходимия баланс между последователното, логическо изграждане на математическите понятия и усвояването им от бъдещите инженери като основен апарат за изучаване на общо-техническите и специални дисциплини и използването им в приложни и научни изследвания. В съответствие с ограничения хорариум, ударението е поставено на втората страна, като изложението е подкрепено с множество примери и подробно решени задачи.

Включени са следните раздели: функция, граница на функция, производна на функция, изследване на функция и неопределен интеграл. Това е основната част от материала, който се изучава от студентите от всички специалности през втори семестър.

Всяка глава съдържа съответния теоретичен материал, примери, голям брой решени задачи и задачи за самостоятелна подготовка. Всички задачи имат отговори, което ще улесни студентите при самостоятелната им работа.

Учебникът ще бъде особено полезен за студенти задочно и дистанционно обучение.

Февруари 2015 г. Авторите

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава 1

Функция. Граница на функция

Целта на тази глава е да запознае читателя с основни понятия в математическия анализ, като безкрайна числова редица, граница на безкрайна числова редица, функция, граница на функция, непрекъснатост на функция.

I. Безкрайни числови редици

Дефиниция 1.1 *Казва се, че е дефинирана безкрайна* ***числова редица***

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_n,\ \dots\ ,$$

ако на всяко естествено число n по определено правило е съпоставено число a_n.

Числата $a_1,\ a_2,\ \dots$ се наричат **членове на редицата;** a_n се нарича **общ член** на редицата.

За числова редица ще използваме означението $\{a_n\}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена,** ако съществува краен и затворен интервал $[m, M]$, съдържащ всички членове на редицата, т.е. такъв, че за всяко n да бъде изпълнено $m < a_n < M$.

Известно е, че между реалните числа и точките от реалната права има взаимно-еднозначно съответствие. Поради тази причина ще отъждествяваме "числото a" с "точката a".

Дефиниция 1.2 ***Околност*** *на точката a наричаме всеки отворен интервал, съдържащ тази точка. Интервалът $(a-\varepsilon\,,\,a+\varepsilon)$ наричаме $\varepsilon-$**околност** на точката a.*

Условието $a_n \in (a-\varepsilon\,,\,a+\varepsilon)$ може да се запише по няколко начина:

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Дефиниция 1.3 *Числото a се нарича* ***граница на редицата*** *$\{a_n\}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова число N, че за всяко $n > N$ е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$.*

Това се означава с $\lim\ a_n = a$ или $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \longrightarrow a.$

Редица, която има граница, се нарича **сходяща.** Редица, която не е сходяща, се нарича **разходяща.**

Теорема 1.1 *Всяка сходяща числова редица е ограничена.*

Доказателство: Според дефиниция 1.3, каквото и $\varepsilon > 0$ да изберем, на него съответства такова число N, че всички членове на редицата $\{a_n\}$ с индекс (номер) n по-голям от N, т.е. всички от известно място нататък, се намират в $\varepsilon-$околност на точката a. Следователно извън тази околност остават краен брой членове. Това означава, че можем да намерим числа m и M такива, че $m < a_n < M$ за всяко n. ■

Теорема 1.2 *Ако* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ *и ако за всяко* n *имаме* $a_n \leq b_n$, *то* $a \leq b$.

Доказателство: Да допуснем, че $a > b$ и да изберем $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$.

Тогава съществува число N_1, такова че при $n > N_1$ е изпълнено

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Аналогично съществува число N_2, такова че при $n > N_2$ е изпълнено

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Но очевидно

$$b + \varepsilon = a - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

Следователно за $n > max\,(N_1, N_2)$ е изпълнено

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n,$$

противоречие. Следователно $a \leq b$. ■

Следващата теорема е известна като теорема (лема) за двамата полицаи.

Теорема 1.3 *Ако* $\lim a_n = \lim b_n = l$ *и* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *за всяко* n, *то* $\lim c_n = l$.

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$. Тогава съществува число N_1, такова че при $n > N_1$ е изпълнено

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon.$$

Аналогично съществува число N_2, такова че при $n > N_2$ е изпълнено

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon.$$

Тогава за $n > max\,(N_1, N_2)$ е изпълнено

$$l - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \varepsilon,$$

т.е. $\lim c_n = l$. ■

Теорема 1.4 *Ако* $\lim a_n = a$ *и* $\lim b_n = b$, *то:*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$
2. $\lim(a_n.b_n) = \lim a_n . \lim b_n = a.b$
3. *Ако* $b_n \neq 0$ *за всяко* n *и* $b \neq 0$, *то* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **монотонно растяща,** ако за всяко n е изпълнено $a_n \leq a_{n+1}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **монотонно намаляваща,** ако за всяко n е изпълнено $a_n \geq a_{n+1}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена отгоре,** ако съществува такова число M, че за всяко n е изпълнено $a_n < M$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена отдолу,** ако съществува такова число m, че за всяко n е изпълнено $m < a_n$.

Теорема 1.5 *Всяка монотонна и ограничена числова редица е сходяща.*

Теоремата можем да разделим на две твърдения:

1. Всяка монотонно растяща и ограничена отгоре редица е сходяща.
2. Всяка монотонно намаляваща и ограничена отдолу редица е сходяща.

Дефиниция 1.4 *Казваме, че редицата $\{a_n\}$ клони (дивергира) към плюс безкрайност ($a_n \longrightarrow +\infty$), ако за всяко положително число M съществува такова число N, че от $n > N$ да следва $a_n > M$.*

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ клони (дивергира) към минус безкрайност ($a_n \longrightarrow -\infty$), ако за всяко отрицателно число M съществува такова число N, че от $n > N$ да следва $a_n < M$.

Теорема 1.6 *Ако* $\lim a_n = \pm\infty$, *то* $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ *и обратно, ако* $\lim a_n = 0$, *то* $\lim \dfrac{1}{a_n} = \pm\infty$.

Основни граници

1. $$\lim n^k = \begin{cases} +\infty, & k > 0, \\ 0, & k < 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

2. $$\lim q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1, \\ 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1. \end{cases}$$

3. Ако $\lim a_n = a > 0$, то $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

4. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

5. $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, където числото $\mathbf{e \approx 2,7182}$ се нарича **Неперово число**.

Обърнете внимание

$$\text{Ако } \lim a_n = \infty, \quad \text{то } \lim \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Например: $\quad \lim \left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3} = e.$

ЗАДАЧИ

1.1 Намерете границата $\quad \lim \dfrac{n^3-3n^2+1}{2n^3-5n^2+4n-3}$.

Решение:

$$\lim \frac{n^3-3n^2+1}{2n^3-5n^2+4n-3} = \lim \frac{n^3\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}\right)} =$$

$$= \lim \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}{2-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}} = \frac{1-0+0}{2-0+0-0} = \frac{1}{2}.$$

1.2 Намерете границата $\quad \lim \dfrac{n^4-3n+5}{2n^2-n-3}$.

Решение:

$$\lim \frac{n^4-3n+5}{2n^2-n-3} = \lim \frac{n^4\left(1-\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^4}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)} = \lim \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^4}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)} = +\infty$$

1.3 Намерете границата $\quad \lim \dfrac{n^4-2n+4}{2n^5-2n-3}$.

Решение:

$$\lim \frac{n^4-2n+4}{2n^5-2n-3} = \lim \frac{n^4\left(1-\frac{2}{n^3}+\frac{4}{n^4}\right)}{n^5\left(2-\frac{2}{n^4}-\frac{3}{n^5}\right)} = \lim \frac{\left(1-\frac{2}{n^3}+\frac{4}{n^4}\right)}{n\left(2-\frac{2}{n^4}-\frac{3}{n^5}\right)} = 0$$

1.4 Намерете границата $\lim \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$.

Решение:

$$\lim \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} = \lim \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} =$$

$$= \lim \frac{\left(n+1+2\sqrt{n+1}.\sqrt{n-1}+n-1\right)}{(n+1)-(n-1)} = \lim \frac{\left(2n+2\sqrt{n^2-1}\right)}{2} =$$

$$= \lim \left(n+\sqrt{n^2-1}\right) = +\infty$$

1.5 Намерете границата $\lim \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.

Решение:

$$\lim \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0.$$

1.6 Намерете границата $\lim \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Решение:

$$\lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim \frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(\dfrac{n-1+1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e} = e^{-1},$$

защото $\lim \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$ и $\lim \left(1+\dfrac{1}{n-1}\right) = 1.$

Задачи за самостоятелна работа:

Да се намерят границите на редиците с общ член:

1.7 $a_n = \dfrac{15n-1}{11+3n}$ Отг. 5.

1.8 $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{2n^3}$ Отг. 0.

1.9 $a_n = \dfrac{5n^3-n^2+n+3}{n^3+5n-1}$ Отг. 5.

1.10 $a_n = \dfrac{2n^4-n^3+7n+15}{n^5-2n^3+5n^2-4}$ Отг. 0.

1.11 $a_n = \dfrac{2n-1}{5n+7} - \dfrac{2n^3+1}{5n^3+2}$ Отг. 0.

1.12 $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^4+5n-2}}{n-1}$ Отг. $+\infty$.

1.13 $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$ Отг. 0.

1.14 $a_n = \sqrt{3n+5} - \sqrt{n-1}$ Отг. $+\infty$.

1.15 $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt{n} + n}$ Отг. 1.

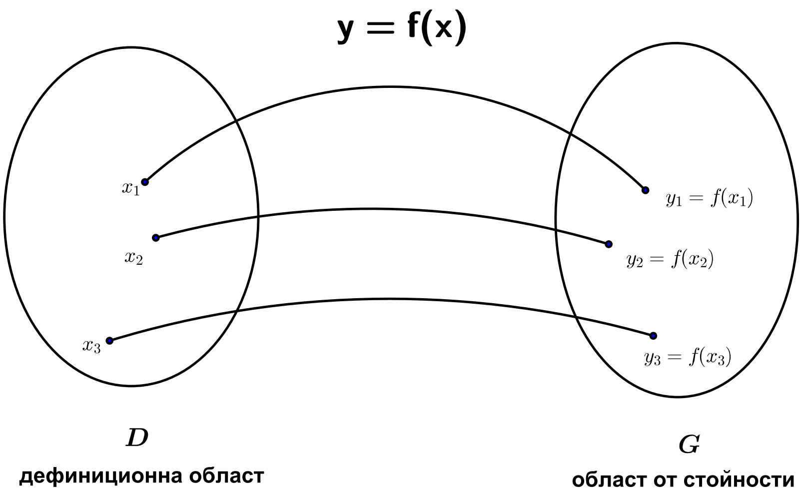
1.16 $a_n = \dfrac{n!(n+3)}{(n+2)! - (n+1)!}$ Отг. 0.

С $n!$ (произнася се **n факториел**) се означава произведението на естествените числа от 1 до n, т.е. $n! = 1.2.3\ldots n$. По дефиниция $0! = 1$.

II. Функция

Понятието функционална зависимост е едно от основните понятия в математиката и играе главна роля в нейните приложения.

Дефиниция 1.5 *Нека D е числово множество и нека по определено правило на всяко число $x \in D$ е съпоставено по едно реално число $f(x)$. Тогава се казва, че в множеството D е зададена функция.*

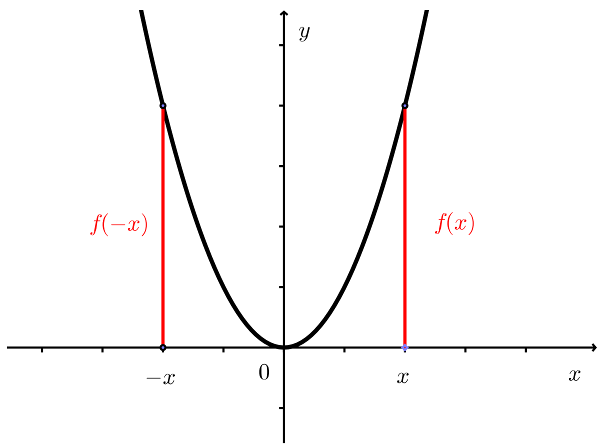


Най-често функцията означаваме с $y = f(x)$, където x е **аргумент** или **независима променлива**, а y е **зависимата променлива**.

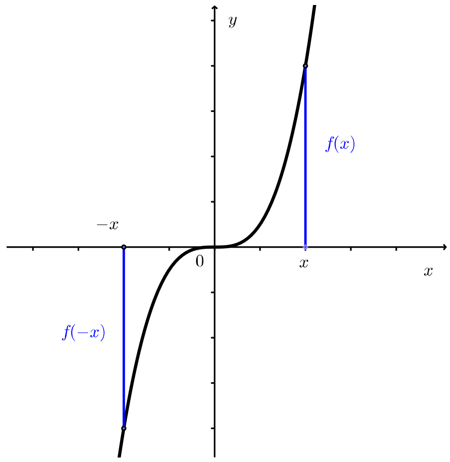
Множеството D се нарича **дефиниционно множество** или **дефиниционна област.** Множеството от всички стойности $y = f(x)$, $x \in D$, се нарича **област от стойности** на функцията или **образ** на множеството D.

Ако в равнината имаме правоъгълна координатна система Oxy, множеството от точки с координати $(x, f(x))$, $x \in D$, се нарича **графика** на функцията $y = f(x)$ или **крива** с уравнение $y = f(x)$.

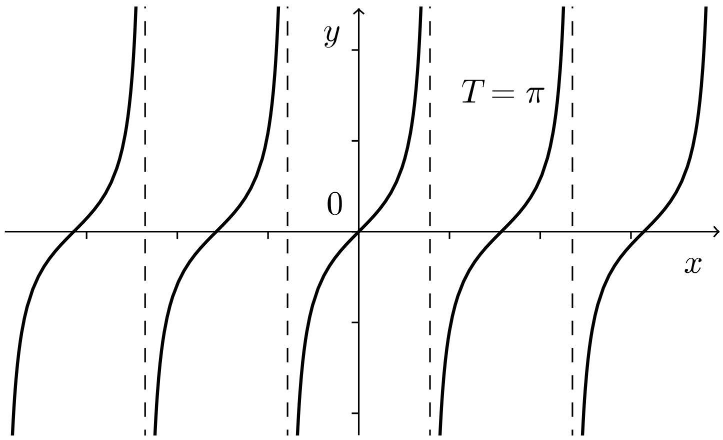
Функцията $y = f(x)$ се нарича **четна,** ако $f(-x) = f(x)$. Графиката на такава функция е ***симетрична относно ординатната ос***.



Функцията $y = f(x)$ се нарича **нечетна,** ако $f(-x) = -f(x)$. Графиката на такава функция е ***симетрична относно координатното начало***.



Функцията $y = f(x)$ се нарича **периодична,** ако $f(x+T) = f(x)$. Най-малкото положително число T с това свойство се нарича **период** на функцията.



Ако съществува число M, така че $|f(x)| < M$ за всяко $x \in D$, то функцията $f(x)$ се нарича **ограничена.** С други думи една функция е ограничена, ако нейното множество от функционални стойности е ограничено.

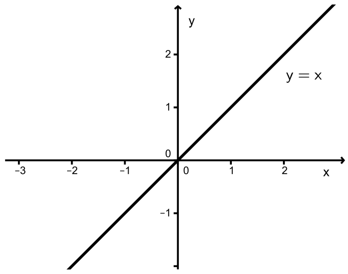
Функцията $f(x)$ се нарича **строго растяща**, ако от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) < f(x_2)$. Функцията $f(x)$ се нарича **строго намаляваща**, ако от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) > f(x_2)$.

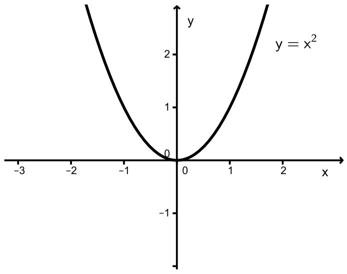
Следващите функции се изучават в училищния курс по математика и се наричат

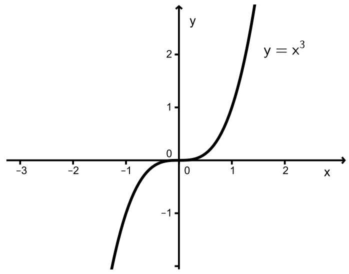
Основни елементарни функции

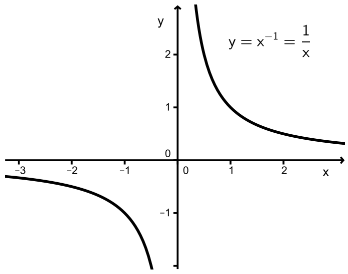
1. $y = x^\alpha$, $x > 0$, α- реално число	**степенна функция**
2. $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$	**показателна функция**
3. $y = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$	**логаритмична функция**
4. $y = \sin\,x$, $y = \cos\,x$, $y = \text{tg}\,x$, $y = \text{cotg}\,x$	**тригонометрични функции**

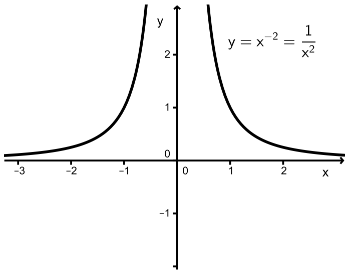
Графиките на тази страница са графики на основни елементарни функции.

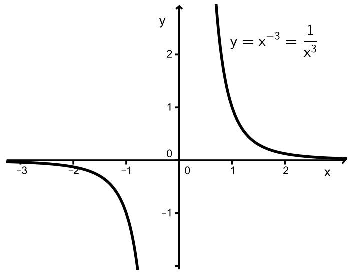


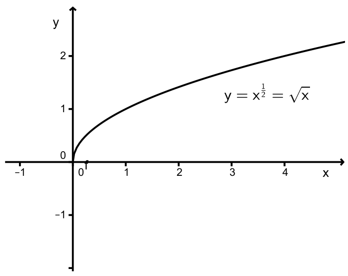


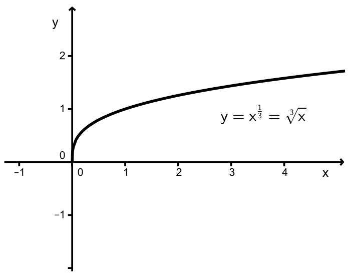


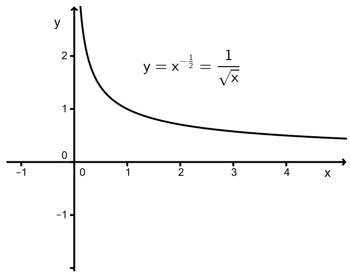


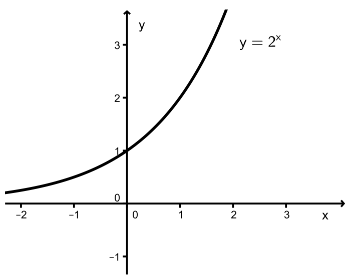


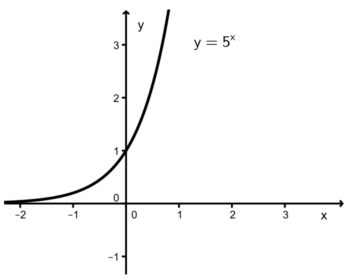


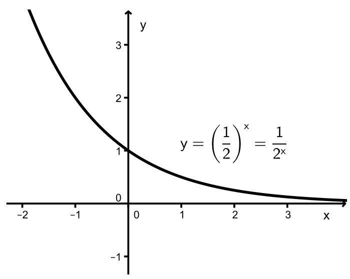


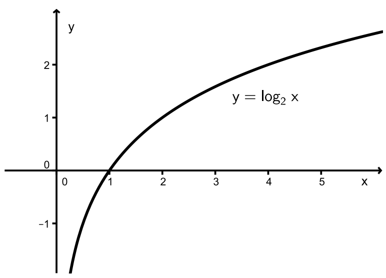


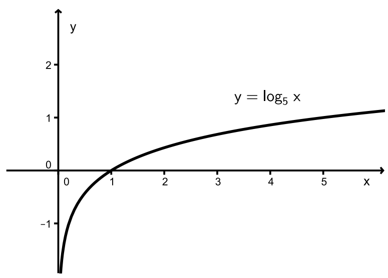


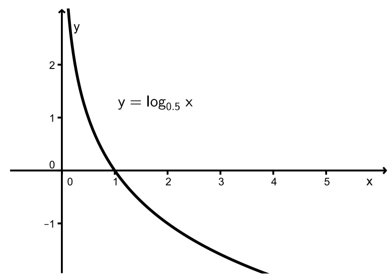






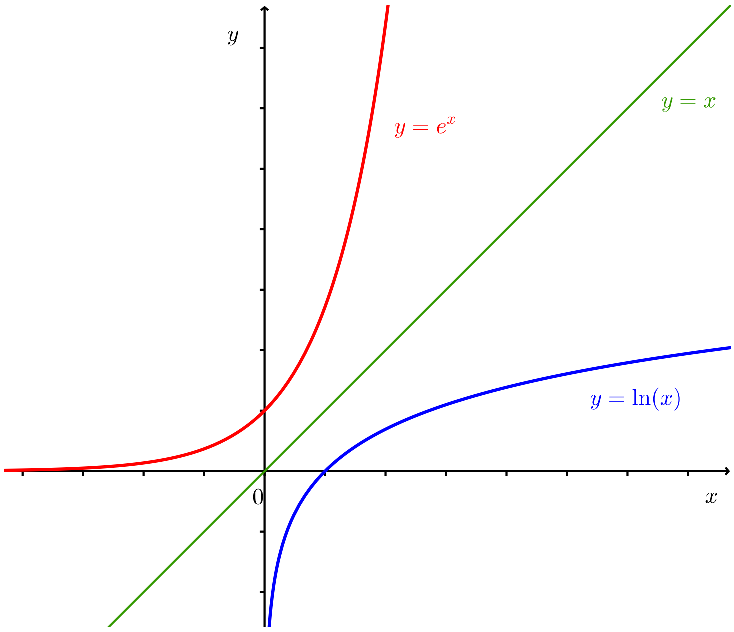






Ако $a = e$, то функцията $y = e^x$ се нарича **експоненциална функция**, а $y = \log_e x = \ln x$ се нарича **натурален логаритъм**.

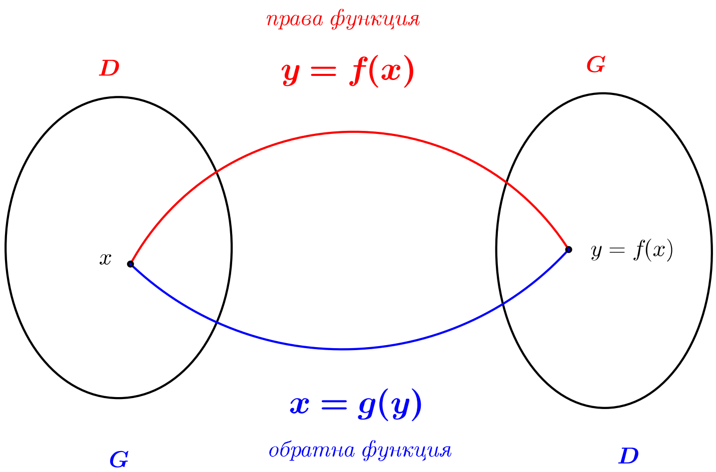
Графиките на двете функции са представени на следващата фигура.



Дефиниция 1.6 *Функцията $f(x)$ се нарича* ***обратима****, ако от неравенството $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. когато на различни стойности на аргумента съответстват различни стойности на функцията.*

Това условие, разбира се, не е изпълнено за всяка функция. Очевидно е обаче, че то е в сила за всяка строго растяща или строго намаляваща функция, т.е. строго растящите и строго намаляващите функции са обратими.

Дефиниция 1.7 *Нека функцията $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in M$ е обратима. Функцията $x = g(y)$, $y \in M$, $x \in D$, която на произволна стойност $y_0 \in M$ съпоставя онази стойност $x_0 \in D$, за която $f(x_0) = y_0$, се нарича* ***обратна*** *на функцията $y = f(x)$.*



От дефиницията виждаме, че областта от стойности на дадената функция служи за дефиниционна област на обратната функция, а дефиниционната област служи за област от стойности на обратната функция.

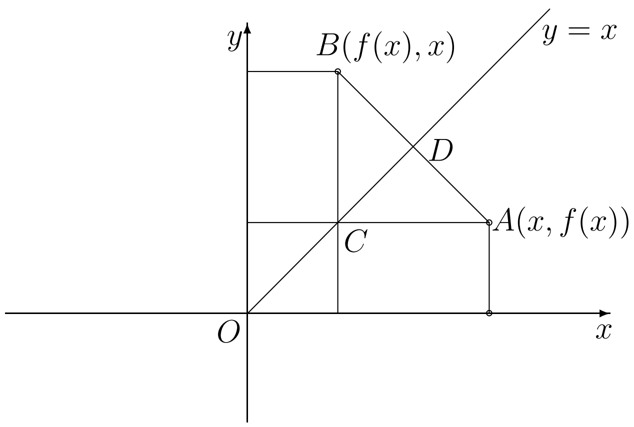
Обратната функция на $f(x)$ $(x \in D)$ се бележи с $f^{-1}(x)$ $(x \in M)$. Често двойката функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ се наричат права и обратна функции.

Очевидно е, че са в сила следните равенства:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in M \qquad \text{и} \qquad f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D.$$

Графиките на двете функции (права и обратна) са симетрични спрямо ъглополовящата на първи и трети квадрант. Лесно е да се убедим в това чрез следващия чертеж.

Наистина, нека точка $A(x, f(x))$ лежи на графиката на правата функция $f(x)$. Тогава точка $B(f(x), x)$ лежи на графиката на обратната функция. Вижда се, че $\triangle$ABC е правоъгълен и равнобедрен. Тогава CD е ъглополовяща, височина и медиана. Следователно $AD = BD$.



Пример: Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ в интервала $[0, \infty)$. Тъй като функцията е строго растяща, тя е обратима и нейната обратна е $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Наистина, функцията $\sqrt{x}$ е дефинирана в интервала $[0, \infty)$ (областта от стойности на x^2 е същият интервал) и $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ и $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$.

Пример: Експоненциалната функция и натуралният логаритъм са взаимно обратни функции. Наистина, дефиниционната област на функцията e^x и областта от стойности на $\ln(x)$ е интервалът $(-\infty, \infty)$, а дефиниционната област на функцията $\ln(x)$ и областта от стойности на e^x е интервалът $(0, \infty)$. Освен това $f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$ и $f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} = x$.

Тригонометричните функции $y = \sin\, x$, $y = \cos\, x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{cotg}\, x$, разгледани в подходящи интервали, в които те са или строго растящи или строго намаляващи, имат обратни функции, които се наричат съответно **аркус синус, аркус косинус, аркус тангенс и аркус котангенс.**

Обратните кръгови функции също са основни елементарни функции. Основните сведения за тях са дадени в следващата таблица.

Обратни кръгови функции

функция	обратна функция
$y = \sin\ x$	$y = \arcsin\ x$
$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $y \in [-1, 1]$ строго растяща	$x \in [-1, 1]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ строго растяща
$y = \cos\ x$	$y = \arccos\ x$
$x \in [0, \pi]$ $y \in [-1, 1]$ строго намаляваща	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$ строго намаляваща
$y = \operatorname{tg}\ x$	$y = \operatorname{arctg}\ x$
$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $y \in (-\infty, +\infty)$ строго растяща	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ строго растяща
$y = \operatorname{cotg}\ x$	$y = \operatorname{arcctg}\ x$
$x \in (0, \pi)$ $y \in (-\infty, +\infty)$ строго намаляваща	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$ строго намаляваща

Пример: $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, защото $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, т.е. при пресмятането на $\arcsin x$ трябва да намерим онази стойност на $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, за която $\sin(y) = x$. Аналогично $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, защото $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, защото $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Дефиниция 1.8 *Ако $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то функцията $F(x) = f(\varphi(x))$ се нарича **съставна функция**, **сложна функция** или **функция от функция**.*

Дефиниция 1.9 ***Елементарни функции** ще наричаме функциите, които се получават от основните елементарни функции и операциите събиране, изваждане, умножение, деление и функция от функция.*

Алгебричните функции включват в себе се *рационалните* и *ирационалните* функции. Функциите, които не са алгебрични се наричат **трансцендентни**.

ЗАДАЧИ

1.17 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x-2|x|-10}}$.

Решение: Знаменателят не може да бъде нула, а изразът под корена трябва да бъде неотрицателен. Следователно функцията е дефинирана, когато

$$3x - 2|x| - 10 > 0.$$

Решаваме това неравенство. Тъй като в израза участва $|x|$, ще разгледаме два случая.
1. Ако $x \in (-\infty, 0)$, то $|x| = -x$ и получаваме неравенство

$$5x - 10 > 0, \quad \text{т.е.} \quad x \in (2, +\infty).$$

Но $x < 0$ и следователно в този случай неравенството няма решение.

2. Ако $x \in [0, +\infty)$, то $|x| = x$ и получаваме неравенството $x - 10 > 0$, т.е $x \in (10, +\infty)$.

Обединяваме резултатите от двата случая и получаваме, че дефиниционната област на функцията е интервала $(10, +\infty)$.

1.18 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \ln(5 - 2x)$.

Решение: Логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Следователно дефиниционната област се определя от условието $5 - 2x > 0$, т.е. $x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$.

1.19 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \cos\left(\ln \dfrac{x+2}{x-1}\right)$.

Решение: Функцията косинус е дефинирана за всяка реална стойност на аргумента, а логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Следователно дефиниционната област се определя от условието

$$\frac{x+2}{x-1} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)(x-1) > 0.$$

Решаваме последното квадратно неравенство и получаваме, че дефиниционната област на функцията е $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

1.20 Да се определи дали е четна или нечетна функцията $y = \sin\, 2x - x \cos\, x$.

Решение: Имаме:

$$y(-x) = \sin\,(-2x) - (-x)\cos\,(-x) = -\sin\, 2x + x\cos\, x =$$

$$= -(\sin\, 2x - x\cos\, x) = -y(x).$$

Следователно функцията е нечетна.

1.21 Да се установи дали е четна или нечетна функцията $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Решение: Имаме:

$$y(-x) = \ln\left(\sqrt{1+(-x)^2} - x\right) = \ln \frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\sqrt{1+x^2} + x} =$$

$$= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -y(x).$$

Следователно функцията е нечетна.

1.22 Да се установи дали е четна или нечетна функцията $y = e^{x-x^2}$.

Решение: $y(-x) = e^{-x-x^2}$.

Ако функцията е четна, то трябва за всяко x да бъде изпълнено

$$e^{x-x^2} = e^{-x-x^2} \quad , \quad \text{т.е.} \quad e^x = e^{-x},$$

което очевидно не е вярно.

Ако функцията е нечетна, то трябва за всяко x да бъде изпълнено

$$e^{-x-x^2} = -e^{x-x^2} \quad , \quad \text{т.е.} \quad e^{-x} = -e^x,$$

което също не е вярно.

Следователно функцията не е нито четна, нито нечетна.

1.23 Да се определи периодът на функцията $y(x) = \sin \dfrac{x}{2}$.

Решение: Функцията $\sin x$ е периодична с период 2π.

Ако

$$\sin \frac{x+T}{2} = \sin \frac{x}{2}, \quad \text{то} \quad \frac{x+T}{2} - \frac{x}{2} = 2\pi, \quad \text{т.е.} \quad T = 4\pi.$$

III. Граница на функция. Непрекъснатост

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, като в самата точка може и да не е дефинирана.

Дефиниция 1.10 ***(Коши)*** *Числото A се нарича **граница на функцията** $f(x)$ при x, клонящо към x_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число $\delta > 0$, че за всяко x, за което $0 < |x - x_0| < \delta$ да бъде изпълнено*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означаваме по следния начин:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Основното в горната дефиниция е, че всеки избор на $\varepsilon > 0$ определя такова число $\delta > 0$, че когато $x \neq x_0$ и принадлежи на δ-околност на точката x_0, стойностите на функцията принадлежат на ε-околност на числото A.

Дефиниция 1.11 ***(Хайне)*** *Числото A се нарича* ***граница на функцията*** *$f(x)$ при $x \to x_0$, ако при всеки избор на числова редица $\{x_n\} \to x_0$ съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\} \to A$.*

Може да се докаже, че дефинициите на Хайне и Коши са еквивалентни.

Ако x клони към x_0 със стойности по-малки от x_0, то границата се нарича **лява,** а ако x клони към x_0 със стойности по-големи от x_0, границата се нарича **дясна.**

Левите и десни граници ще означаваме съответно с:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Равенството $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ е еквивалентно с $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал от вида $(a, +\infty)$.

Дефиниция 1.12 *Казваме, че A е граница на функцията $f(x)$, когато x клони към $+\infty$, ако при всеки избор на $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число K, че за всяко $x > K$ да бъде изпълнено неравенството*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Записваме по следния начин:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

Аналогични дефиниции се дават и за границите

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \text{и} \;\; \text{др.}$$

Теорема 1.7 *Нека $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тогава в околност на точката x_0 функцията $f(x)$ е ограничена .*

Доказателство: От дефиницията на Коши следва

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0 \quad \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Ако $\varepsilon = 1$, получаваме $f(x) < A + 1 = M$, т.е. функцията е ограничена в съответната δ-околност на точката x_0. ■

Теорема 1.8 *Нека* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ *и* $f(x) \leq g(x)$ *в околност на* x_0. *Тогава* $A \leq B$.

Доказателство: Прилагаме дефиницията на Хайне. Нека $\{x_n\} \to x_0$. Тогава за достатъчно големи n точките x_n ще принадлежат на разглежданата околност на точката x_0 и за тях ще бъде изпълнено $f(x_n) \leq g(x_n)$. Прилагаме Теорема 1.2 и получаваме $A \leq B$. ■

Теорема 1.9 *Нека* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ *и* $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ *в околност на* x_0. *Тогава* $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

Доказателство: Отново прилагаме дефиницията на Хайне. Нека $\{x_n\} \to x_0$. Тогава за достатъчно големи n точките x_n ще принадлежат на дадената околност на точката x_0 и за тях ще бъде изпълнено $f(x_n) \leq \varphi(x_n) \leq g(x_n)$. Сега прилагаме Теорема 1.3 и получаваме $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$. ■

Теорема 1.10 *Ако*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad и \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

то:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [\ f(x) \pm g(x)\ ] = A \pm B$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [\ \alpha f(x)\ ] = \alpha A$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} [\ f(x).g(x)\ ] = A.B$,
4. *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ *и* $g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Верността на тези твърдения следва от дефиницията на Хайне и Теорема 1.4. ■

Дефиниция 1.13 *Казваме, че функцията* $f(x)$ *е безкрайно малка при* $x \to x_0$, *ако* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Теорема 1.11 *Произведението на безкрайно малка функция и ограничена функция е безкрайно малка функция.*

Пример: $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{x^3-2}{x^2+1} = 0$, защото функцията $\sin\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ е ограничена, а функцията $x-1$ е безкрайно малка при $x \to 1$.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\, x}{x} = 0$, защото функцията $\sin\, x$ е ограничена, а функцията $\dfrac{1}{x}$ е безкрайно малка при $x \to \infty$.

Някои основни граници

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}a^{\frac{1}{x}}=1 \quad (a>0)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\, x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\cos\, x=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\, x}{x}=1$

В първи раздел Нeперовото число дефинирахме като границата на редицата с общ член $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Сега ще докажем, че

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

<u>*1 случай*</u>: $x\to+\infty$.

Тогава

$$n\le x\le n+1$$

$$\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{n+1}\le 1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Но

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\lim\frac{n+1}{n+2}=e$$

и

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\lim\frac{n+1}{n}=e.$$

От Теорема 1.10 следва, че

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

<u>*2 случай*</u> $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

Полагаме $x+1=-t$. Тогава $t\to+\infty$ и $x=-(t+1)$. Следователно

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=$$

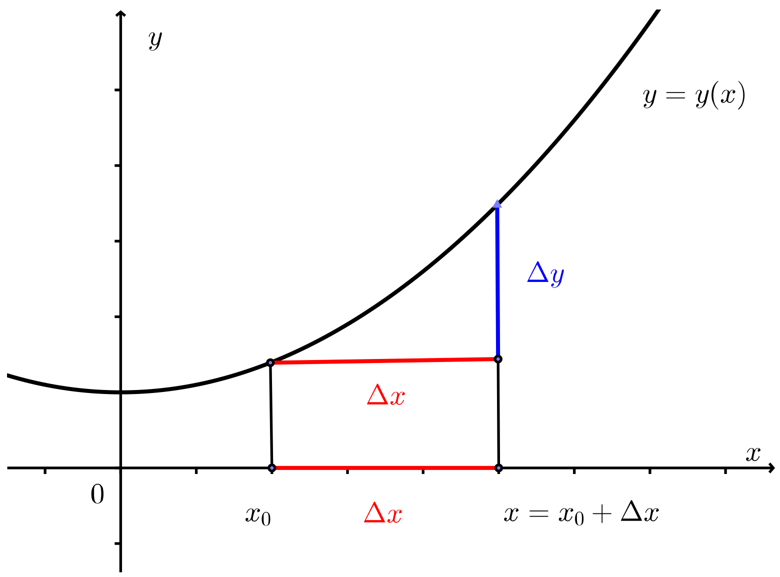
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e$$

■

Нека x_0 и x са точки от дефиниционната област на функцията $y=f(x)$. Разликата $\Delta x=x-x_0$, която може да бъде положително или отрицателно число, наричаме **нарастване на аргумента**, а

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

наричаме **нарастване на функцията** в точката x_0, съответстващо на Δx.



Дефиниция 1.14 *Казваме, че функцията $y=f(x)$ е* ***непрекъсната*** *в точката x_0, когато на безкрайно малко нарастване на аргумента отговаря безкрайно малко нарастване на функцията, т.е.*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \tag{1.1}$$

Очевидно е, че $\Delta x\to 0\iff x\to x_0$ и равенството (1.1) можем да запишем по следния начин:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0.$$

Следователно от дефиниция (1.14) получаваме

Дефиниция 1.15 *Казваме, че функцията $y=f(x)$ е* ***непрекъсната*** *в точката x_0, ако тя има граница при $x\to x_0$ и*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1.2}$$

Ако в горната дефиниция оставим x да клони към x_0 със стойности по-големи (по-малки) от x_0 , получаваме дефиниция за непрекъснатост на функция **отдясно (отляво).** Чрез тези дефиниции равенство (1.2) добива вида

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x). \tag{1.3}$$

Точките, в които равенството (1.3) е нарушено, се наричат **точки на прекъсване.**

Ако функцията $f(x)$ е такава, че $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ съществуват, но равенството (1.3) не е изпълнено, то очевидно функцията не е непрекъсната в точката x_0. Точката x_0 в този случай се нарича **точка на прекъсване от първи род**.

Точка на прекъсване от първи род, за която $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ се нарича **отстранима точка на прекъсване**.

Ако функцията $f(x)$ е такава, че $f(x_0-0)$ или $f(x_0+0)$ не съществуват или някоя от тези граници е безкрайност, точката x_0 в този случай се нарича **точка на прекъсване от втори род**.

Теорема 1.12 *Ако* $f(x)$ *и* $g(x)$ *са непрекъснати в дадена точка* x_0, *то и функциите* $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x).g(x)$, *а в случая когато* $g(x_0)\neq 0$, *и функцията* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *са непрекъснати в тази точка.*

Теорема 1.13 *Нека функцията* $y=f(u)$ *е непрекъсната в точката* u_0, *функцията* $u=\varphi(x)$ *е непрекъсната в точката* x_0 *и* $u_0=\varphi(x_0)$. *Тогава сложната функция* $F(x)=f(\varphi(x))$ *е непрекъсната в точката* x_0, *т.е. непрекъсната функция от непрекъсната функция е също непрекъсната функция.*

Доказателство: От това, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0 следва, че $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)=u_0$, т.е. когато $x\to x_0$, то $u\to u_0$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)) = F(x_0)$$

■

Следващата теорема показва, че ако една функция е непрекъсната в точката x_0, то в околност на тази точка тя запазва своя знак.

Теорема 1.14 *Нека* $f(x)$ *е непрекъсната в точката* x_0. *Тогава:*
1. Ако $f(x_0)>0$, *то съществува такава околност* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, *че* $f(x)>0$ *за всяко* $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.
2. Ако $f(x_0)<0$, *то съществува такава околност* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, *че* $f(x)<0$ *за всяко* $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично. От дефиницията на Коши имаме

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0, \quad \text{такова че} \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \quad \text{е изпълнено}$$

$$f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$

Нека изберем $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. Тогава за всяко x от съответната на този избор на ε околност ще бъде изпълнено

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

∎

Теорема 1.15 *Основните елементарни функции са непрекъснати във всяка точка от техните дефиниционни области.*

Една функция се нарича непрекъсната в даден интервал, ако е непрекъсната във всяка точка от този интервал. Следващите три теореми отразяват важни свойства на функциите, които са непрекъснати в краен и затворен интервал.

Теорема 1.16 *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена в този интервал.*

Теорема 1.17 ***(Теорема на Вайерщрас)*** *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя притежава най-голяма и най-малка стойност в този интервал, т.е. съществуват такива точки $\alpha, \beta \in [a, b]$, че $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ за всяко $x \in [a, b]$.*

Теорема 1.18 ***(Теорема на Болцано)*** *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и ако $f(a) \neq f(b)$, а λ е число между $f(a)$ и $f(b)$, то съществува поне една точка c в интервала (a, b), за която $f(c) = \lambda$.*

ЗАДАЧИ

1.24 Да се намери

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2x - 1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2 - \boxed{\frac{3}{x}}^{\nearrow 0} + \boxed{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0} - \boxed{\frac{5}{x^3}}^{\nearrow 0}\right)}{1 + \boxed{\frac{2}{x}}_{\searrow 0} - \boxed{\frac{1}{x^2}}_{\searrow 0}} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$$

1.25 Да се намери
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x^2+2x-3}{x^4-x^2+2x-1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-5x^2+2x-3}{x^4-x^2+2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\boxed{\dfrac{5}{x}}^{\nearrow 0}+\boxed{\dfrac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}-\boxed{\dfrac{3}{x^3}}^{\nearrow 0}}{x\left(1-\boxed{\dfrac{1}{x^2}}_{\searrow 0}+\boxed{\dfrac{2}{x^3}}_{\searrow 0}-\boxed{\dfrac{1}{x^4}}_{\searrow 0}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

1.26 Да се намери
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x} = -\frac{1}{2}$$

1.27 Да се намери
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{4}{3}$$

1.28 Да се намери
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

1.29 Да се намери
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+x+x^2}{x(1+\sqrt{1-x-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{x(1+\sqrt{1-x-x^2})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1+\sqrt{1-x-x^2}}=\frac{1}{2}$$

1.30 Да се намери

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\cos x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1,$$

защото

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

1.31 Да се намери

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x+3}).$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x+3})=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x+3})(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+3})}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{4}{1+1}=2.$$

1.32 Да се намери

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x.\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x.\sin^2 x}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x.4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x.\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

1.33 Да се намери

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x\sin x} - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x\sin x} - \cos 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x\sin x - \cos^2 2x}{\sin^2 x(\sqrt{1+2x\sin x} + \cos 2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin^2 x\cos^2 x + 2x\sin x}{2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} 2\cos^2 x + \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 2+1 = 3.$$

1.34 Да се дефинира функцията $y = \dfrac{x^4-16}{x-2}$ в точката $x=2$ така, че получената функция да бъде непрекъсната.

Решение: Функцията не е дефинирана при $x=2$. Да намерим границата

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4) = 32.$$

Ако дефинираме една нова функция $f(x)$ по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x-2}, & x \neq 2 \\ 32, & x = 2 \end{cases},$$

то тази функция е непрекъсната за всяко x.

Задачи за самостоятелна работа:

Да се намерят границите на функциите:

1.35 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-3x^2+3x-5}{x^2+3x^4-x+1}$ Отг. $\dfrac{5}{3}$

1.36 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x^2+8x-1}{3x^4+5x^3-x+1}$ Отг. 0

1.37 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x^6-2x^3+7x^2-2x+1}{2x^4+11x^3-x^2+1}$ Отг. $+\infty$

1.38 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{7x^5-3x^4+7x^2-5x+1}{2x^4+5x^3-x^2-3x+3}$ Отг. $-\infty$

1.39 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-5x^3-7x^5-2x+15}{x^4+x^3-3x^2-2x+1}$ Отг. $+\infty$

1.40 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ Отг. $\dfrac{1}{6}$

1.41 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

1.42 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$ Отг. 0

1.43 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 10x}{\operatorname{tg} 2x}$ Отг. 5

1.44 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ Отг. 2

1.45 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ Отг. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

1.46 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$ Отг. $-\dfrac{1}{12}$

Упътване: Използвайте формулата $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

1.47 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x^2}$ Отг. $-\infty$

1.48 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-1}{x^2}$ Отг. $-\infty$

1.49 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ Отг. $-\infty$

1.50 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ Отг. $+\infty$

1.51 $\lim\limits_{x\to2^-}\ln(x^2-5x+6)$ Отг. $-\infty$

1.52 $\lim\limits_{x\to3^+}\ln(x^2-5x+6)$ Отг. $-\infty$

1.53 Да се изследва за непрекъснатост функцията $y=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

Отг. $x=2$ - отстранима точка на прекъсване.

1.54 Да се изследва за непрекъснатост функцията $y=e^{\frac{1}{x-2}}$.

Отг. $x=2$ - точка на прекъсване от II род.

Глава 2

Производна на функция

Целта на тази глава е да запознае читателя с едно от най-важните понятия в математическия анализ – понятието производна на функция. Разгледани са производните на основните елементарни функции, правилата за диференциране, основните теореми на диференциалното смятане и някои приложения на производните.

Основни дефиниции и формули

Преди да дефинираме понятието производна на функция, ще покажем, че условието $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ е еквивалентно с $f(x) = A + \varepsilon(x)$, където $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, т.е. в сила е следната

Лема 2.1:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \varepsilon(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

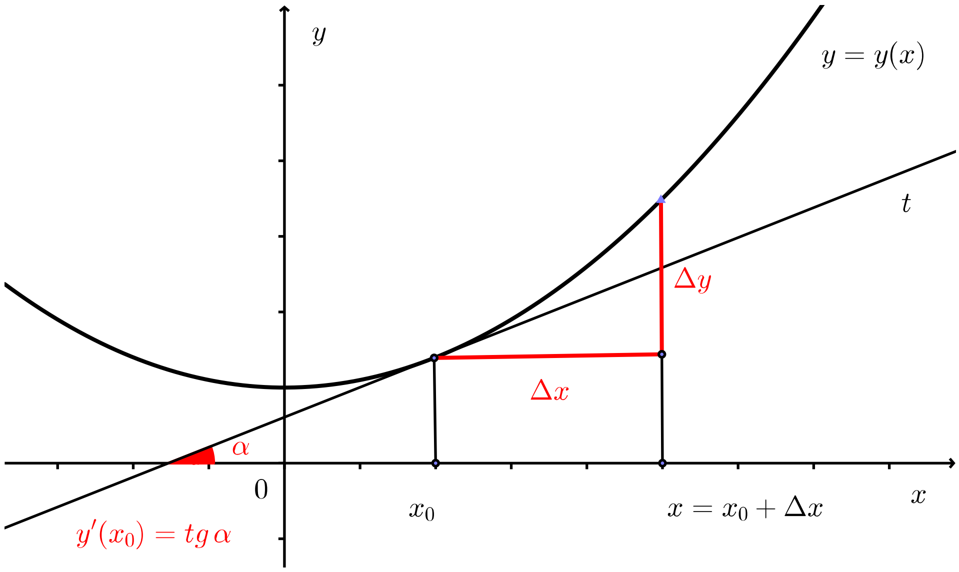
Доказателство: **1.** " $\Longleftarrow$ " Нека $f(x) = A + \varepsilon(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (A + \varepsilon(x)) = A + \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = A + 0 = A$$

2. " $\Longrightarrow$ " Нека сега $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогава от дефиницията на Коши имаме

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \delta > 0, \ \text{такова че когато } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Означаваме $\varepsilon(x) = f(x) - A$. Следователно $|\varepsilon(x)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ и $f(x) = A + \varepsilon(x)$. ■



Дефиниция 2.1 *Нека функцията $y = y(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, включително и в самата точка x_0. Образуваме отношението (т.н.* ***диференциално отношение****)*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Границата на това отношение при $\Delta x \to 0$ (ако съществува) се нарича ***производна*** *на функцията $y(x)$ в точката x_0. Означаваме я с $y'(x_0)$, т.е.*

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Функция, която има производна в дадена точка, се нарича **диференцируема.**

За функцията $y(x) = x^2$, например, във всяка точка x имаме

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Ако $\Delta x \to 0$ с отрицателни стойности, производната се нарича **лява**, а ако $\Delta x \to 0$ с положителни стойности, производната се нарича **дясна**, т.е.

$$y'_{\text{Л}}(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

$$y'_{\text{Д}}(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Очевидно е, че една функция е диференцируема в точката x_0, ако

$$y'_{\text{Л}}(x_0) = y'_{\text{Д}}(x_0) = y'(x_0)$$

Отношението $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}$ е равно на тангенса на ъгъла, който секущата през точките с координати $(x, y(x))$ и $(x_0, y(x_0))$ сключва с положителната посока на абсцисната ос. Когато $\Delta x \to 0$, т.е. $x \to x_0$, секущата става допирателна (тангента) към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0))$. Следователно **геометричното значение на производната** на функцията в точката x_0 е, че тя е равна на тангенса на ъгъла α, който тангентата към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0))$ сключва с положителната посока на оста x, т.е.

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

Следователно уравнението на допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0) = y_0)$ е

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Правата, която минава през същата точка и е перпендикулярна на тангентата, се нарича нормала. Както знаем от ВМ, Част I, произведението от ъгловите коефициенти на две перпендикулярни прави е равно на -1. Следователно уравнението на нормалата е

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

Нека функцията $s = s(t)$ изразява пътя, който дадена точка изминава в зависимост от времето t. Средната скорост в интервала $[t, t + \Delta t]$ е

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

а

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

е **скоростта на точката** в момента t.

Нека $Q = Q(t)$ е количеството електричество, което преминава през сечението на проводник за време t. Средната сила на тока в интервала $[t, t + \Delta t]$ е

$$Q_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t},$$

а

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} Q_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = Q'(t)$$

е **силата на тока** в момента t.

Теорема 2.1 *Ако функцията $y = y(x)$ има производна в точката x, то тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство: От

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$$

и Лема 2.1 следва

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)+\varepsilon(\Delta x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$$

$$\Delta y=y'(x)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x \qquad \text{и} \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$$

Следователно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}y'(x).\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x).\Delta x=y'(x).0+0=0$$

■

Нека $y=F(x)$, $u=u(x)$ и $v=v(x)$ са диференцируеми функции, а C е константа.

Основни правила за диференциране

1. $(C.u)'=C.u'$

2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

3. $(u.v)'=u'.v+u.v'$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$

5. $[F(u(x))]'=F'_u.u'_x=F'(u(x)).u'(x)$

6. Ако $x=g(y)$ е обратната функция на $y=f(x)$ и $f'(x)\neq 0$, то

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

Производни на основните елементарни функции

1. $(c)' = 0, \quad x' = 1$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

3. $(a^x)' = a^x . \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Ще докажем някои от горните формули.

Нека $y = \ln x$. Тогава

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x},$$

защото $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

За логаритмичната функция при произволна основа $y = \log_a x$ имаме $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ и получаваме $y' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Функцията $y = a^x$ е обратна функция на $x = \log_a y$. Използваме формулата за производна на обратна функция и получаваме

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

При $a = e$ следва, че $(e^x)' = e^x$.

Нека $y = \sin x$.
Тогава

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} . \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x,$$

защото $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ и функцията $\cos x$ е непрекъсната.

За $y = \operatorname{tg} x$ имаме:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{и} \quad y' = \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Нека $y = \arcsin x$. Обратната функция на $y = \arcsin x$ е $x = \sin y$. Използваме формулата за производна на обратна функция и получаваме

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

защото $\sin^2 y = (\sin(\arcsin x))^2 = x^2$.

Функцията $y = \operatorname{arctg} x$ е обратна функция на $x = \operatorname{tg} y$, следователно

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

защото $\operatorname{tg}^2 y = (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2 = x^2$.

Нека $y = x^\alpha$ $(x > 0,\ \alpha \in R)$. Тогава имаме $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Прилагаме формулата за производна на сложна функция и получаваме

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} . (\alpha \ln x)' = x^\alpha . \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

ЗАДАЧИ

2.1 Да се докаже, че функцията $f(x) = |x|$ няма производна в точката $x_0 = 0$.

Решение:
Образуваме диференциалното отношение

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Ако $\Delta x > 0$, то $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$, но ако $\Delta x < 0$, то $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$.

Това означава, че $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ няма граница при $\Delta x \to 0$,

т.е. $f(x) = |x|$ няма производна в разглежданата точка.

2.2 Да се намери производната на функцията

$$y = 4x^5 + 2x^2 - \sqrt{x} + \ln x$$

Решение:

$$y' = 20x^4 + 4x - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{x} = 20x^4 + 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

2.3 Да се намери производната на функцията

$$y = 3e^x + 2\sin x - 5\ \mathrm{tg}\, x + \frac{5}{x^2} - 3$$

Решение:

$$y' = 3e^x + 2\cos x - \frac{5}{\cos^2 x} + 5(x^{-2})' = 3e^x + 2\cos x - \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{10}{x^3}$$

2.4 Да се намери производната на функцията

$$y = (x^5 - 3x^3)\cos x$$

Решение:

$$y' = (x^5 - 3x^3)'\cos x + (x^5 - 3x^3)(\cos x)' = (5x^4 - 9x^2)\cos x - (x^5 - 3x^3)\sin x$$

2.5 Да се намери производната на функцията

$$y = \frac{x^7 - 2x^3}{x - 1}$$

Решение:

$$y' = \frac{(x^7 - 2x^3)'(x-1) - (x^7 - 2x^3)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(7x^6 - 6x^2)(x-1) - (x^7 - 2x^3)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{6x^7 - 7x^6 - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(6x^5 - 7x^4 - 4x + 6)}{(x-1)^2}$$

В разгледаните до момента примери не беше използвана формула (5), известна като формула за намиране производната на сложна функция. Прилагането на тази формула изисква първо на функцията $u(x)$ да гледаме като на аргумент u и след като намерим производната на $F(u)$, да я умножим с производната на $u(x)$.

2.6 Да се намери производната на функцията $y = e^{3x^2}$.

Решение: Да означим $u(x) = 3x^2$. Тогава $y = F(u) = e^u$ и

$$y' = e^u.u' = e^u.(3x^2)' = 6x.e^{3x^2}$$

2.7 Да се намери производната на функцията $y = \ln(x^3 + 2x^2 + 1)$

Решение: Да означим $u(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Тогава $y = F(u) = \ln u$, т.е. y е сложна функция.

Чрез формулата за производна на сложна функция получаваме

$$y' = F'(u(x)).u'(x) = \frac{1}{u} \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)' = \frac{1}{u} \cdot (3x^2 + 4x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

2.8 Да се намери производната на функцията

$$y = \ln(\sin x)$$

Решение: Да означим $u(x) = \sin x$ и $F(u) = \ln u$.

Имаме $y = F(u(x))$, т.е. y е сложна функция.

Чрез формулата за производна на сложна функция получаваме

$$y' = F'(u(x)).u'(x) = \frac{1}{u} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

2.9 Да се намери производната на функцията

$$y = \sin(x^2 + 2x - 1)$$

Решение: Отново става дума за сложна функция.

Следователно

$$y' = \cos(x^2+2x-1).(x^2+2x-1)' = (2x+2)\cos(x^2+2x-1).$$

2.10 Да се намери производната на функцията

$$y = \ln(x+\sqrt{x^2+7})$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+7}} \cdot (x+\sqrt{x^2+7})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+7}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}$$

2.11 Да се намери производната на функцията

$$y = \arcsin\frac{1}{x}$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{|x|.\sqrt{x^2-1}}$$

2.12 Да се намери производната на функцията

$$y = e^{3x}\,\sin 2x$$

Решение:

$$y' = \left(e^{3x}\right)'\sin 2x + e^{3x}\,(\sin 2x)' = 3e^{3x}\,\sin 2x + 2e^{3x}\,\cos 2x = e^{3x}(3\sin 2x + 2\cos 2x)$$

2.13 Да се намери производната на функцията

$$y = 3^{\operatorname{arctg} x^3}$$

Решение:

$$y' = 3^{\operatorname{arctg} x^3}.\ln 3.(\operatorname{arctg} x^3)' = 3^{\operatorname{arctg} x^3} \cdot \ln 3 \cdot \frac{3x^2}{1+x^6}$$

Производната на функция от вида $y = u(x)^{v(x)}$ се намира посредством **предварително логаритмуване**. Ще го демонстрираме със следващите два примера:

2.14 Да се намери производната на функцията

$$y = x^x$$

Решение: Логаритмуваме функциите от двете страни на равенството и получаваме

$$\ln y = x.\ln x$$

Диференцираме горното равенство относно x и получаваме:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

От тук

$$y' = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

2.15 Да се намери производната на функцията

$$y = x^{\operatorname{arctg} x}$$

Решение: Логаритмуваме функциите от двете страни на равенството и получаваме

$$\ln y = \operatorname{arctg} x.\ln x$$

Диференцираме горното равенство относно x и получаваме

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{1+x^2}\cdot\ln x + \frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg} x$$

От тук

$$y' = x^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)$$

Производни от по-висок ред

Нека функцията $y(x)$ има производна $y'(x)$ във всяка точка от интервала (a,b). Тази производна е отново функция на x и може в интервала (a,b) да има своя производна, която се нарича втора производна (производна от втори ред) на $y(x)$. Означаваме я с $y''(x)$ или $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

Изобщо, първата производна на производната от ред $(n-1)$ се нарича n-та производна. Записваме

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$$

2.16 Намерете n-тата производна на функцията $y = \sin x$.
Решение: Пресмятаме

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

Очевидно за производната от n-ти ред имаме

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

2.17 Намерете n-тата производна на функцията $y = \cos x$.

Отг. $y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

2.18 Намерете $y^{(n)}$ на функцията $y = \frac{1}{x}$.

Решение: Последователно получаваме

$$y' = -\frac{1}{x^2}; \qquad y'' = \frac{2}{x^3}; \qquad y''' = \frac{-2.3}{x^4}; \qquad y^{IV} = \frac{2.3.4}{x^5}$$

Това е достатъчно за да направим предположение, че

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$$

Тази формула лесно се доказва по индукция.

Диференциал на функция

Нека функцията $y = y(x)$ има производна в точката x_0. От Лема 2.1 следва, че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$$

Следователно

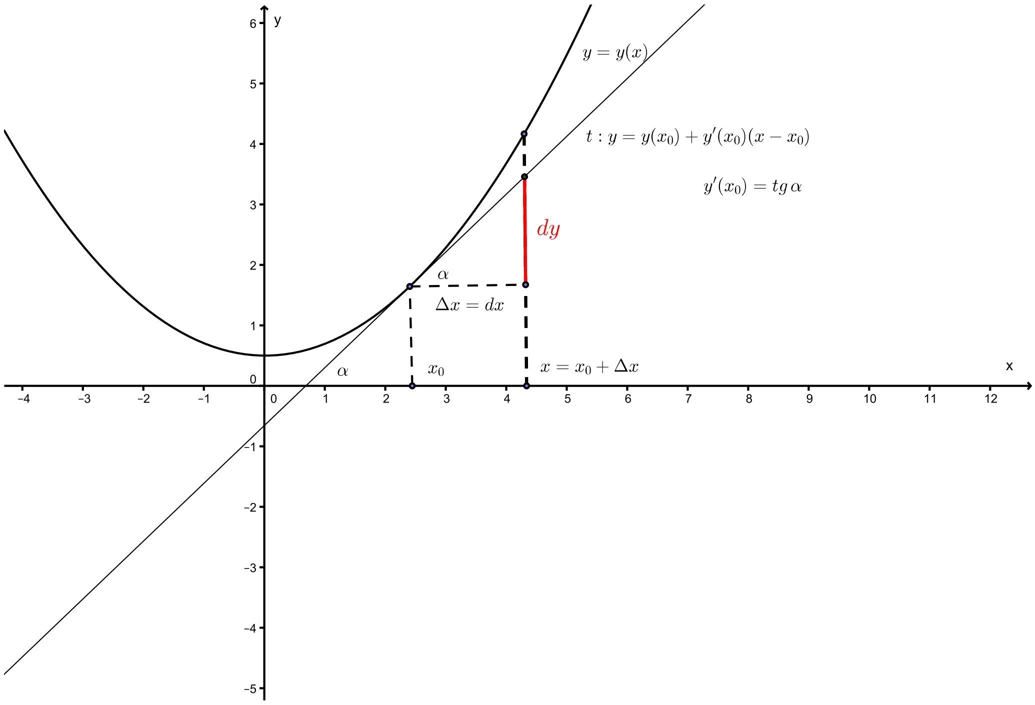
$$\Delta y = y'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x$$

Първото събираемо $y'(x_0)\Delta x$ се нарича **диференциал** на функцията $y(x)$ в точката x_0 и се означава с $\mathrm{d}y$.

Диференциалът $\mathrm{d}x$ на независимата променлива x е равен на нарастването Δx. Следователно

$$\mathrm{d}y = y'(x)\ \mathrm{d}x, \qquad \text{а} \qquad y'(x) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

От следващия чертеж се вижда, че диференциалът е равен на частта от нарастването на функцията, която е под допирателната.



2.19 Да се намери диференциалът на функцията $\quad y(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Решение:

$$y'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Основни теореми на диференциалното смятане

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0.

Дефиниция 2.2 *Функцията $f(x)$ има* ***локален максимум*** *(**локален минимум**) в точката x_0, ако съществува околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, за всяка точка от която е изпълнено $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x_0) \le f(x))$.*

Точките на локални минимуми и локални максимуми се наричат точки на **локални екстремуми.**

Теорема 2.2 *(**Теорема на Ферма**) Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и има локален екстремум в тази точка, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказателство: Да приемем, че функцията има локален максимум в точката x_0.

Ако $x = x_0 + \Delta x$ е произволна точка от околността $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, за нарастването на функцията имаме

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \le 0.$$

Да разгледаме лявата и дясната производни в точката x_0. Имаме съответно:

$$f'_{\text{Л}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0, \qquad \text{защото} \quad \Delta x < 0$$

$$f'_{\text{Д}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0, \qquad \text{защото} \quad \Delta x > 0$$

Но функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и това означава, че лявата производна трябва да е равна на дясната производна. Това е възможно само ако те са равни на нула, т. е. $f'(x_0) = 0$. ■

Теорема 2.3 *(**Теорема на Рол**) Нека функцията $f(x)$ е:*

- непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$,

- диференцируема в отворения интервал (a, b),

- $f(a) = f(b)$.

Тогава съществува такава точка $c \in (a, b)$, че $f'(c) = 0$.

Доказателство: От условието на теоремата следва, че е в сила теоремата на Вайерщрас, т.е. функцията достига най-голямата и най-малката си стойности. Ако тези стойности се достигат в краищата на интервала $[a, b]$, то от $f(a) = f(b)$ следва, че функцията е константа, а производната на константа е нула във всяка точка на интервала $[a, b]$. Ако поне една от тези стойности се достига в точка $c \in (a, b)$, то това е точка на локален екстремум за функцията и следователно за нея е в сила теоремата на Ферма, т.е. $f'(c) = 0$, с което теоремата е доказана. ■

Теорема 2.4 *(**Теорема на Коши**) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са:*

- непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$,

- диференцируеми в отворения интервал (a, b),

- $g'(x) \neq 0$ в интервала (a, b).

Тогава съществува такава точка $c \in (a, b)$, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказателство: Да разгледаме функцията

$$F(x) = [f(x) - f(a)] - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

За тази функция е в сила теоремата на Рол, защото тя е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и $F(a) = F(b) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

Съгласно теоремата на Рол съществува точка $c \in (a, b)$, такава че

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

Теорема 2.5 *(Теорема на Лагранж) Нека функцията $f(x)$ е:*

- непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$,

- диференцируема в отворения интервал (a,b).

Тогава съществува такава точка $c \in (a,b)$, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Доказателство: Прилагаме теоремата на Коши при $g(x) = x$. Имаме $g(b) = b$, $g(a) = a$ и $g'(x) = 1$. Следователно

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

■

Теорема 2.6 *(Основна теорема на интегралното смятане) Ако $f'(x) = 0$ в интервала (a,b), то функцията е константа в този интервал.*

Доказателство: Да фиксираме точката $x_0 \in (a,b)$ и нека $x \in (a,b)$ е произволна точка. Прилагаме теоремата на Лагранж за точките x_0 и x и получаваме:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x-x_0) = 0.(x-x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x_0),$$

а това означава, че $f(x)$ е константа. ■

Неопределени форми. Теореми на Лопитал

Както вече добре знаем, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$. Ако $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, тогава $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Ако обаче $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и търсим $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ казваме,че имаме **неопределеност от вида** $\dfrac{0}{0}$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$, тогава $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Когато обаче $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ и търсим $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, имаме **неопределеност от вида** $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Тези две неопределености ще наричаме **основни неопределени форми**. За тях са в сила следните теореми:

Теорема 2.7 *(Правило на Лопитал)Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката x_0, с евентуално изключение на самата точка x_0, $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ в тази околност и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Тогава, ако съществува $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и е изпълнено равенството

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказателство: Дефинираме двете функции в точката x_0, като $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Сега за интервала $[x_0, x]$ можем да приложим теоремата на Коши:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad c \in (x_0, x)$$

т.е.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad c \in (x_0, x)$$

Когато $x \to x_0$, то и $c \to x_0$ и от съществуването на $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ получаваме

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■

Теорема 2.8 *(Правило на Лопитал Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката x_0, с евентуално изключение на самата точка x_0, $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ в тази околност и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty.$$

Тогава, ако съществува $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и е изпълнено равенството

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теоремите остават в сила и когато $x \to \infty$. Наистина, ако положим $x = \dfrac{1}{t}$, тогава $t \to 0$.

$$\Longrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

В теоремите се твърди, че от съществуването на $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ следва съществуването на $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Обратното не е вярно, т.е. може $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ да съществува, а $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ да не съществува. С други думи, от това че $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не съществува, не можем да правим изводи за $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ако след прилагането на теоремите на Лопитал получим пак неопределеност, то очевидно е че пак можем да ги приложим, т.е теоремите могат да се прилагат няколко пъти последователно.

Дефиницията на неопределените форми от вида $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ е очевидна. Първите две, $0.\infty$ и $\infty-\infty$, се свеждат към основните чрез алгебрични преобразования.

• Неопределеност $0.\infty$ имаме, когато търсим граница от вида $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ и $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тази неопределеност може да се сведе до $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ по следния начин: Ако преобразуваме

$$f(x).g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},\qquad \text{получаваме първата основна неопределеност } \frac{0}{0},$$

а преобразувайки

$$f(x).g(x)=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}},\qquad \text{получаваме втората основна неопределеност } \frac{\infty}{\infty}.$$

• Неопределеност $\infty-\infty$ имаме, когато търсим граница от вида $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$ и $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. За решаване на тази неопределеност преобразуваме по следния начин:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

Ако $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=1$, то имаме неопределеност от вида $0\cdot\infty$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}\neq 1$, тогава $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\left(1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)=\infty$.

• Случаите 0^0, ∞^0 и 1^∞ се свеждат до $0.\infty$ чрез логаритмуване.

ЗАДАЧИ

2.20 Да се намери $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

Решение: Числителят и знаменателят на израза клонят към нула при $x \to 0$, т.е. имаме неопределена форма от вида $\dfrac{0}{0}$. Прилагаме правилото на Лопитал. Образуваме отношението от производните на числителя и знаменателя $\dfrac{4e^{4x}}{\dfrac{2}{1+4x^2}}$ и търсим границата му когато $x \to 0$. Имаме: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}}{\dfrac{2}{1+4x^2}} = 2$. Следователно $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}}{\dfrac{2}{1+4x^2}} = 2$.

2.21 Да се намери $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение: Числителят и знаменателят на израза клонят към нула при $x \to 0$, т.е. това е неопределена форма от вида $\dfrac{0}{0}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

2.22 Да се намери $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$.

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. По правилото на Лопитал образуваме отношението $\dfrac{2(\ln x)\dfrac{1}{x}}{3x^2} = \dfrac{2\ln x}{3x^3}$, което отново представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пак прилагаме правилото на Лопитал и получаваме отношението $\dfrac{2}{9x^3}$, което има граница нула при $x \to +\infty$. Следователно

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3} = 0$$

Решението може да се запише накратко по следния начин:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{2\ln x}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2\ln x}{3x^3} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \frac{2}{3}\lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{3x^3} = 0$$

2.23 Да се намери $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)}$.

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{e^x}{e^x-e}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-e}{e^x(x-1)} = \frac{1}{e}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-e}{x-1} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \frac{1}{e}\lim_{x\to 1^+}e^x = 1$$

2.24 Да се намери $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\ \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение: Имаме $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)=0$, а $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}=\infty$. Затова изразът представлява неопределена форма от вида $0\cdot\infty$. Преобразуваме до неопределеност от вида $\dfrac{0}{0}$ и прилагаме правилото на Лопитал. Получаваме:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\ \mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2} \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\mathrm{cotg}\,\frac{\pi x}{2}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}$$

2.25 Да се намери $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{cotg}\,x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение: Изразът представлява форма от вида $\infty-\infty$. Преобразуваме до неопределеност от вида $\dfrac{0}{0}$ и прилагаме правилото на Лопитал. Получаваме:

$$\lim_{x\to 0}\left(\mathrm{cotg}\,x-\frac{1}{x}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

2.26 Да се намери $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида 1^∞. Нека

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}}$$

Логаритмуваме двете страни на горното равенство и получаваме

$$\ln y = \frac{1}{\sin x} \cdot \ln \frac{\sin x}{x}$$

Търсим границата при $x \to 0$. Имаме:

$$\lim_{x\to 0} \ln y \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{\ln \dfrac{\sin x}{x}}{\sin x} \ \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \ \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x}{\sin x} \cdot \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{\cos x} \ =$$

$$= \ \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \cos x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2\cos x} \ \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x \ - \cos x}{2x\cos x - x^2 \sin x} \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} \ = \ 0$$

Получихме, че $\lim\limits_{x\to 0} \ln y \ = \ \ln \lim\limits_{x\to 0} y \ = \ 0.$ Следователно

$$\lim_{x\to 0} y = \ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}} \ = \ 1$$

2.27 Да се намери $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2.\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$

Решение: Имаме неопределеност от вида $\dfrac{0}{0}$. По правилото на Лопитал образуваме отношението на производните

$$\frac{2x.\sin\dfrac{1}{x} - x^2.\cos\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x^2}}{\cos x} = \frac{2x\sin\dfrac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$$

Първото събираемо клони към нула, но второто събираемо няма граница, защото $\cos\dfrac{1}{x}$ няма граница при $x \to 0$.

И така, отношението на производните няма граница. От това, разбира се, нищо не следва (Вж. коментара след Теорема 2.8). Границата, която търсим, може да съществува, а може и да не съществува. Трябва да потърсим друг начин за решаване на задачата. Например така:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\dfrac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 0$$

(Съществено тук е, че функцията $\sin\dfrac{1}{x}$ е ограничена.)

Задачи за самостоятелна работа:

2.28 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

2.29 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x^2+x}$ Отг. 1

2.30 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1+x^3)}{e^{x^2}}$ Отг. 0

2.31 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$ Отг. $\dfrac{1}{3}$

2.32 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$ Отг. $-\dfrac{1}{2}$

2.33 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{x^2}}$ Отг. 0

2.34 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\ln(2-x)}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}}$ Отг. 0

2.35 $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \ln(x-1)$ Отг. 0

2.36 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}\right)$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

2.37 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$ Отг. 0

2.38 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$ Отг. 0

2.39 $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\ln^3 x)$ Отг. $+\infty$

2.40 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ Отг. 1

2.41 $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$ Отг. e^3

Глава 3

Изследване на функция

Целта на тази глава е да запознае читателя с приложенията на граници и производни за изследване на функции и построяване на техните графики.

Монотонност и екстремум на функция

Дефиниция 3.1 *Функцията $y = y(x)$ се нарича* ***растяща*** *в интервала (a, b), ако за всеки две числа x_1 и x_2, такива че $a < x_1 < x_2 < b$, е вярно $y(x_1) \leq y(x_2)$. Функцията $y = y(x)$ се нарича* ***намаляваща*** *в интервала (a, b), ако за всеки две числа x_1 и x_2, такива че $a < x_1 < x_2 < b$, е вярно $y(x_1) \geq y(x_2)$.*

Ако една функция е растяща (намаляваща) в даден интервал, тя се нарича **монотонна**.

Нека $y(x)$ е растяща функция. Да вземем точките x и $x + \Delta x$. Ако $\Delta x > 0$, то $x < x + \Delta x$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \geq 0$. Ако $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \leq 0$. Следователно и в двата случая

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Вярно е и обратното: ако $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, то функцията $y(x)$ е растяща. Следователно

$$\boxed{y(x) \quad \text{е растяща в даден интервал} \iff \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0}$$

Аналогично

$$\boxed{y(x) \quad \text{е намаляваща в даден интервал} \iff \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0}$$

Теорема 3.1 *Нека функцията $y(x)$ е диференцируема в интервала (a, b). Тогава:*

1. $y(x)$ *е растяща в този интервал* $\iff$ $y'(x) \geq 0$

2. $y(x)$ *е намаляваща в този интервал* $\iff$ $y'(x) \leq 0$

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично.

"$\Longrightarrow$" Нека $y(x)$ е растяща в интервала (a, b). Тогава $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

"$\Longleftarrow$" Нека $y'(x) \geq 0$ в интервала (a, b). За точките x и $x + \Delta x$, вътрешни за интервала (a, b), прилагаме теоремата на Лагранж.

$$\frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{x + \Delta x - x} = y'(c), \qquad c \in (x, x + \Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(c) \geq 0$$

Следователно $y(x)$ е растяща в интервала (a, b). ■

От теорема 3.1 лесно следва верността на следващата теорема.

Теорема 3.2 *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в някоя околност на точката x_0, включително и в самата точка x_0, и е диференцируема в тази околност, с евентуално изключение на точката x_0. Нека за точките x от същата околност $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Тогава в точката x_0 функцията има локален максимум.*

Теоремата е едно достатъчно условие за локален екстремум на функцията $f(x)$ в точката x_0. При това в самата точка x_0 функцията може да няма производна.

Следващата формула е известна като **формула на Тейлър**.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \qquad c \in (x_0, x)$$

Формулата на Тейлър, до втората производна, можем да запишем по следния начин

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \qquad c \in (x_0, x)$$

Когато $x_0 = 0$, формулата на Тейлър е известна като формула на Маклорън.

Точките, в които първата производна на функцията се анулира, наричаме **стационарни точки**.

Теорема 3.3 *Нека x_0 е стационарна точка за функцията $f(x)$, а $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Ако $f''(x_0) < 0$, функцията има локален максимум в точката x_0. Ако $f''(x_0) > 0$, функцията има локален минимум в точката x_0.*

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично.

От това, че $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $f''(x_0) < 0$ следва, че съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такава че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е изпълнено $f''(x) < 0$. (*Непрекъснатите функции в околност на точката запазват своя знак - теорема 1.15.*)

Избираме произволна точка $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и прилагаме формулата на Тейлър до втората производна.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

защото $f'(x_0) = 0$. Тъй като $c \in (x_0, x)$, то $f''(c) < 0$, а $(x - x_0)^2 \geq 0$. Следователно

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \leq 0,$$

т.е. в точката x_0 функцията има локален максимум. ■

Най-голяма и най-малка стойност на функция в затворен интервал

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$. Най-голямата и най-малката стойности на функцията в този интервал намираме по следния начин:

1. Намираме точките, в които функцията има локални екстремуми – нека те са $x_1, x_2, ..., x_k$.

2. Най-голямото от числата $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)$ е най-голямата стойност на функцията, а най-малкото - най-малката стойност на функцията.

ЗАДАЧИ

3.1 Да се изследва за монотонност функцията $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Решение: Функцията е дефинирана за всяко x.

$$y'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$$

Оттук се вижда, че $y'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, а при $x \in (-1, 3)$ е в сила $y'(x) \leq 0$. Това означава, че в първите два интервала функцията е растяща, а в интервала $(-1, 3)$ е намаляваща.

3.2 Да се изследва за монотонност функцията $y = x - \sin x$.

Решение: Функцията е дефинирана за всяко x. Пресмятаме $y'(x) = 1 - \cos x$. Тъй като $-1 \leq \cos x \leq +1$, то $y'(x) \geq 0$ за всяко x и следователно функцията е растяща в интервала $(-\infty, +\infty)$.

3.3 Да се изследва за монотонност функцията $y = x\ln x$.

Решение: Функцията е дефинирана при $x > 0$. Пресмятаме $y'(x) = \ln x + 1$. Решаваме неравенството $y'(x) \geq 0$, т.е. $\ln x \geq -1$ и получаваме $x \geq e^{-1}$. Аналогично $y'(x) \leq 0$ при $0 < x \leq e^{-1}$. Следователно, функцията е намаляваща в интервала $(0, e^{-1})$ и растяща в интервала $(e^{-1}, +\infty)$.

3.4 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Решение: Тъй като знаменателят не се анулира, функцията е дефинирана за всяко x. Производната е

$$y'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)^2}$$

Знаменателят е положителен и следователно знакът на производната се определя от числителя. Квадратният тричлен $x^2 + 2x - 1$ се анулира в $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = -1 + \sqrt{2}$, т.е. в тези точки първата производна е равна на нула. Имаме

$$y'(x) > 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2) \qquad \text{и} \qquad y'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

От достатъчното условие за локален екстремум следва, че в точката $x_1 = -1-\sqrt{2}$ функцията има локален минимум, а в точката $x_2 = -1+\sqrt{2}$ – локален максимум. Стойностите им са

$$y(-1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \qquad y(-1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

3.5 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

Решение: Функцията е дефинирана при $x > 0$.

$$y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Вижда се, че $y'(1) = 0$, $y'(x) < 0$ при $x < 1$, и $y'(x) > 0$ при $x > 1$. Следователно в точката $x = 1$ функцията има локален минимум. Пресмятаме $y(1) = 1$.

3.6 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \cos 2x - 2\sin x$

Решение: Функцията е дефинирана за всяко x и е периодична с период 2π. Затова ще търсим локалните екстремуми само в интервала $[0, 2\pi)$.

$$y'(x) = -2\sin 2x - 2\cos x = -2\cos x(2\sin x + 1)$$

Получихме, че $y'(x) = 0$, когато $\cos x = 0$ или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$. Решенията на тези две уравнения в интервала $[0, 2\pi)$ са

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

Намираме втората производна на функцията

$$y''(x) = -4\cos 2x + 2\sin x$$

След това пресмятаме

$$y''(x_1) = 6 > 0, \qquad y''(x_2) = 2 > 0, \qquad y''(x_3) = -3 < 0, \qquad y''(x_4) = -3 < 0$$

Това означава, че в точките x_1 и x_2 функцията има локален минимум, а в точките x_3 и x_4 функцията има локален максимум. Стойностите им са:

$$y(x_1) = -3, \qquad y(x_2) = 1, \qquad y(x_3) = \frac{3}{2}, \qquad y(x_4) = \frac{3}{2}.$$

3.7 Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията $y = e^{2x} - e^{-x}$ в интервала $[-1, 2]$.

Решение: Намираме първата производна на функцията.

$$y'(x) = 2e^{2x} + e^{-x} > 0,$$

т.е. функцията е растяща и локални екстремуми няма. Следователно най-малката стойност на функцията се достига в левия край на интервала, а най-голямата в десния. Съответните стойности са:

$$y(-1) = \frac{1}{e^2} - e, \qquad y(2) = e^4 - \frac{1}{e^2}.$$

Задачи за самостоятелна работа:

3.8 Да се изследват за монотонност функциите

а) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Отг. растяща при $x \in (0, e)$
намаляваща при $x \in (e, +\infty)$

б) $y = 2x^2 - \ln x$

Отг. намаляваща при $x \in (0, 0.5)$
растяща при $x \in (0.5, +\infty)$

в) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

Отг. намаляваща при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
растяща при $x \in (0, 2)$

г) $y = \dfrac{e^x}{x}$

Отг. намаляваща при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$
растяща при $x \in (1, +\infty)$

д) $y = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

Отг. растяща при $x \in (-\infty, 0)$
намаляваща при $x \in (0, +\infty)$

3.9 Да се намерят локалните екстремуми на функциите

а) $y = x\ln x$ Отг. $y_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

б) $y = x^2\ln x$ Отг. $y_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

в) $y = \frac{x^2+1}{x}$ Отг. $y_{\max}(-1) = -2, \quad y_{\min}(1) = 2$

г) $y = x^3 e^{-x}$ Отг. $y_{\max}(3) = \frac{27}{e^3}$

д) $y = \frac{e^x}{x}$ Отг. $y_{\min}(1) = e$

е) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$ Отг. $y_{\min}\left(\frac{8}{27}\right) = -\frac{4}{27}, \quad y_{\max}(0) = 0$

ж) $y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} x$ Отг. $y_{\min}(1) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$

3.10 Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията в затворения интервал

а) $y = 2x^2 - x^4 + 3 \qquad x \in [-2, 2]$ Отг. $-5, \quad 4$

б) $y = x + 2\sqrt{x} \qquad x \in [0, 4]$ Отг. $0, \quad 8$

в) $y = \frac{x-1}{x+1} \qquad x \in [0, 2]$ Отг. $-1, \quad \frac{1}{3}$

Изпъкналост и вдлъбнатост

Нека функцията $f(x)$ е диференцируема в околност на точката x_0.

Дефиниция 3.2 *Казваме, че функцията е* ***изпъкнала*** *в точката x_0, ако съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че за всяка точка от тази околност* ***кривата $y = f(x)$ е разположена над допирателната*** *в точката x_0.*

Дефиниция 3.3 *Казваме, че функцията е* ***вдлъбната*** *в точката x_0, ако съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че за всяка точка от тази околност* ***кривата $y = f(x)$ е разположена под допирателната*** *в точката x_0.*

Дефиниция 3.4 *Казваме, че при $x = x_0$ кривата $y = f(x)$ има* ***инфлексна точка,*** *ако съществува такава околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, че за всяка точка от интервала $(x_0-\delta, x_0)$ кривата е от едната страна на допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$, а за всяка точка от интервала $(x_0, x_0+\delta)$ – от другата страна на допирателната.*

Дадените по-горе дефиниции не обхващат всички възможности. Върху някои криви може да има точки, в които кривата не е нито изпъкнала, нито вдлъбната, нито има инфлексия.

Теорема 3.4 *Ако функцията $f(x)$ има в точката x_0 непрекъсната втора производна и $f''(x_0) > 0$, то в тази точка функцията е изпъкнала, а ако $f''(x_0) < 0$, функцията е вдлъбната.*

Доказателство: От това, че $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $f''(x_0) > 0$ следва, че съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е изпълнено $f''(x) > 0$ (*Непрекъснатите функции в околност на точката запазват своя знак - теорема 1.15*).

Избираме произволна точка $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и прилагаме формулата на Тейлър до втората производна.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

Тъй като $c \in (x_0, x)$, то $f''(c) > 0$. Освен това $(x - x_0)^2 \geq 0$. Следователно

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \geq 0.$$

Но

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

е ординатата на точката с абсциса x върху допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, f(x_0))$. Следователно графиката на функцията е над тангентата, т.е. тя е изпъкнала.

Аналогично се доказва и за вдлъбната функция. ■

Теорема 3.5 *Ако в точката x_0 кривата $y = f(x)$ има инфлексия и в нея функцията $f(x)$ има втора производна, то $f''(x_0) = 0$.*

Обратното твърдение не е вярно.

Например за функцията $f(x) = x^4$ имаме $f''(0) = 0$, но точката с абсциса $x = 0$ не е инфлексна точка.

Дефиниция 3.5 *Функцията $y = f(x)$ се нарича изпъкнала (вдлъбната) в интервал, когато е изпъкнала (вдлъбната) във всяка точка от този интервал.*

Теорема 3.6 *Нека функцията $y = f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и има втора производна в (a, b). Необходимото и достатъчно условие тази функция да бъде изпъкнала (вдлъбната) в $[a, b]$ е $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) за всяко $x \in (a, b)$.*

Теорема 3.7 *Нека функцията $f(x)$ има втора производна в околност на точката x_0. Ако $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, а $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ или пък $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, а $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то при $x = x_0$ кривата има инфлексия.*

ЗАДАЧИ

3.11 Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост функцията $y = x - \ln x$.

Решение: Дефиниционната област на функцията е интервалът $(0, +\infty)$. Намираме производните

$$y'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$y''(x) = \frac{1}{x^2}$$

Очевидно $y''(x) > 0$, т.е. функцията е изпъкнала. Инфлексни точки няма.

3.12 Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост функцията $y = x^2 e^{-x}$.

Решение: Функцията е дефинирана при всяко x. Пресмятаме производните:

$$y'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$y''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Тъй като $e^{-x} > 0$, знакът на $y''(x)$ зависи само от знака на $x^2 - 4x + 2$. Корените на $x^2 - 4x + 2 = 0$ са $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$. При $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ втората производна е положителна и функцията е изпъкнала. При $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ втората производна е отрицателна и функцията е вдлъбната. Следователно при $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ имаме инфлексни точки.

Задачи за самостоятелна работа:

3.13 Да се изследва за изпъкналост и вдлъбнатост функцията

а) $y = x^4 + 6x^2$ — Отг. изпъкнала за всяко x

б) $y = 2x^2 + \ln x$ — Отг. вдлъбната при $x \in (0, \frac{1}{2})$

изпъкнала при $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

инфлексна точка при $x = \frac{1}{2}$

в) $y = x.\operatorname{arctg} x$ — Отг. изпъкнала при $x \in (-\infty, +\infty)$

г) $y = \ln(x^3+1)$ Отг. вдлъбната при $x \in (-1,0)$ и $x \in (\sqrt[3]{2}, +\infty)$

изпъкнала при $x \in (0, \sqrt[3]{2})$

инфлексни точки при $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{2}$

Асимптоти

Дефиниция 3.6 *Ако* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ *или* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, *то правата* $y = b$ *се нарича* ***хоризонтална асимптота*** *на кривата* $y = f(x)$.

Дефиниция 3.7 *Ако* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, *то правата* $x = a$ *се нарича* ***вертикална асимптота*** *на кривата* $y = f(x)$.

Вертикални асимптоти може да имаме само в точки на прекъсване на функцията.

Дефиниция 3.8 *Правата* $y = kx+n$ $(k \neq 0)$ *се нарича* ***наклонена асимптота*** *на кривата* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, *ако*

$$f(x) = kx + n + \alpha(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0.$$

Аналогично се дефинира и асимптота при $x \to -\infty$.

Теорема 3.8 *Необходимо и достатъчно условие правата* $y = kx + n$ *да бъде асимптота на кривата* $y = f(x)$ *при* $x \to \infty$ *е да съществуват границите*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{и} \qquad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]$$

.

Доказателство: 1. Нека правата $y = kx+n$ е асимптота на кривата $y = f(x)$ при $x \to \infty$. Следователно

$$f(x) = kx + n + \alpha(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0.$$

Тогава

$$k = \frac{f(x)}{x} - \frac{n}{x} - \frac{\alpha(x)}{x}$$

и

$$k = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{n}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - 0 - 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},$$

а

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx]$$

2. Нека сега съществуват двете граници от условието на теоремата.

От $n = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$ и Лема 2.1 следва, че

$$f(x) - kx = n + \alpha(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty}\alpha(x) = 0,$$

т.е. правата $y = kx + n$ е асимптота на кривата $y = f(x)$ при $x \to \infty$. ■

ЗАДАЧИ

3.14 Да се намерят асимптотите на кривата $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$

Решение: Дефиниционната област на функцията е $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, т.е. точките $x = 1$ и $x = 2$ са точки на прекъсване.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \pm\infty$$

Следователно кривата няма хоризонтални асимптоти.
Когато $x \to 1$ числителят на функцията клони към 1, а знаменателят към нула. Това означава, че $\lim\limits_{x\to 1} y = \infty$ и следователно правата $x = 1$ е вертикална асимптота на кривата. Аналогично се убеждаваме, че и правата $x = 2$ е вертикална асимптота.
Сега ще търсим наклонени асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1, \text{ т.е.}$$

ако кривата има наклонени асимптоти, те могат да бъдат само с ъглов коефициент $k = 1$. Пресмятаме и втората граница:

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 3$$

Следователно кривата има асимптота $y = x + 3$ при $x \to \pm\infty$.

3.15 Да се намерят асимптотите на кривата $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$

Решение: Дефиниционната област на функцията се определя от условията:

$$x \neq 0 \quad \text{и} \quad e + \frac{1}{x} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x(e.x + 1) > 0$$

Следователно функцията е дефинирана при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{e}\right) \cup (0, +\infty)$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x.\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty,$$

т.е. кривата няма хоризонтални асимптоти.

Вертикални асимптоти може да има само в точките на прекъсване $x = -\dfrac{1}{e}$ и $x = 0$.

Пресмятаме
$$\lim_{x\to -\frac{1}{e}^-}\left(x.\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\right) = \infty,$$

защото първият множител клони към $-\dfrac{1}{e}$, а вторият към $-\infty$. Това означава, че правата $x = -\dfrac{1}{e}$ е вертикална асимптота.

За точката $x = 0$ пресмятаме

$$\lim_{x\to 0^+}(x.\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)) \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{ex+1} = 0$$

Този резултат показва, че в точката $x = 0$ няма вертикална асимптота.

Преминаваме към търсенето на наклонени асимптоти. Пресмятаме:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\pm\infty} x\ \left(\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{0}{0}]}{=}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{ex+1} = \frac{1}{e}.$$

Следователно правата $y = x + \dfrac{1}{e}$ е наклонена асимптота на дадената крива при $x \to \pm\infty$.

3.16 Да се намерят асимптотите на кривата $y = x + \operatorname{arctg} x$

Решение: Функцията е дефинирана и непрекъсната във всички точки, следователно тя няма вертикални асимптоти. Търсим наклонени асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1+0 = 1,$$

защото $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$.

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$$

Тук получихме, че кривата има две наклонени асимптоти. При $x \to +\infty$, асимптотата е $y = x + \dfrac{\pi}{2}$, а при $x \to -\infty$, асимптотата е $y = x - \dfrac{\pi}{2}$.

Задачи за самостоятелна работа:

3.17 Да се намерят асимптотите на кривите

а) $y \;=\; 2x + \operatorname{arctg} 3x$ Отг. $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}, \;\; y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$

б) $y \;=\; \dfrac{x^2+1}{2x+3}$ Отг. $x = -\dfrac{3}{2}, \;\; y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}$

в) $y \;=\; xe^{\frac{1}{x}}$ Отг. $x = 0, \;\; y = x + 1$

г) $y \;=\; \dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$ Отг. $x = -1, \;\; y = 0.5x - 1$

Изследване на функция и чертане на графика

Цялостното изследване на функция се извършва в следната последователност:

1. Определят се дефиниционната област на функцията и точките на прекъсване.
2. Проверява се дали функцията е четна, нечетна или периодична.
3. Изследва се функцията в краищата на интервалите, в които тя е непрекъсната. Така се намират хоризонталните и вертикални асимптоти.
4. Търсят се наклонени асимптоти на функцията.
5. Определят се интервалите на монотонност и екстремумите на функцията.
6. Определят се интервалите на вдлъбнатост и изпъкналост на функцията и инфлексните точки.
7. Търсят се пресечни точки на графиката с координатните оси.

Резултатите се систематизират в таблица и се построява графиката на функцията.

ЗАДАЧИ

3.18 Да се изследва функцията $y(x) = (1+x^2)\sqrt{x^2+1}$ и да се начертае нейната графиката.

Решение:

1. Функцията е дефинирана и непрекъсната за всяко x, т.е $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Четна е , защото $(-x)^2 = x^2$. Поради тази причина ще я изследваме само в интервала $[0, +\infty)$.

Функцията не е периодична. Наистина, да допуснем, че е периодична с период $T > 0$. Тогава $y(T) = (T^2+1)^{\frac{3}{2}} = y(0) = 1$. Получаваме $T^2 + 1 = 1$, т.е. $T = 0$ – противоречие.

3. Намираме границата на функцията когато $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2+1)\sqrt{x^2+1} \;= +\infty$$

Това означава, че функцията няма хоризонтална асимптота.

4. Търсим наклонени асимптоти:

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{(1+x^2)\sqrt{x^2+1}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Следователно функцията няма наклонени асимптоти.

5. Намираме първата производна:

$$y'(x) = \left((x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x^2+1}.(2x) = 3x\sqrt{x^2+1}$$

В интервала $(0, +\infty)$ производната е положителна и това означава, че функцията е растяща.

6. Пресмятаме втората производна: $y''(x) = 3\left(\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right) > 0$, т.е. функцията е изпъкнала.

7. Единствената пресечна точка на графиката с координатните оси е точката $(0, 1)$, защото $y(0) = 1$, а $y(x) > 0$ за всяко x.

Попълваме таблицата:

x	0		$+\infty$
y	1		$+\infty$
y'		$+$	
y''		$+$	

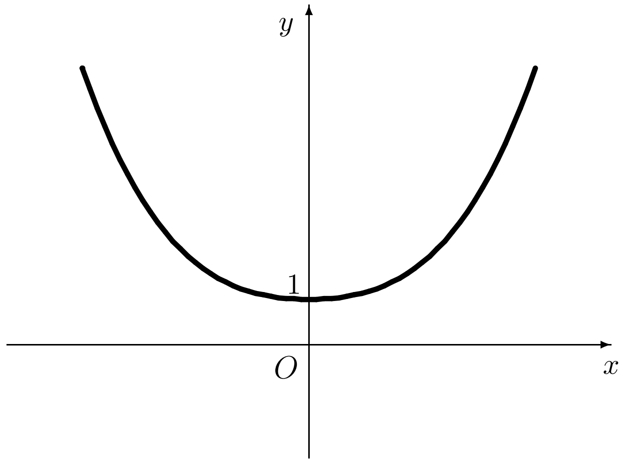
Означения

 – функцията е растяща и изпъкнала

 – функцията е растяща и вдлъбната

 – функцията е намаляваща и изпъкнала

 – функцията е намаляваща и вдлъбната



3.19 Да се изследва функцията $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ и да се построи нейната графика.

Решение:

1. Функцията е дефинирана и непрекъсната за всяко x, т.е $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Пресмятаме

$$y(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -y(x)$$

Следователно функцията е нечетна. Поради тази причина ще я изследваме само в интервала $[0, +\infty)$.

Функцията не е периодична. Наистина, да допуснем, че функцията е периодична с период $T > 0$. Тогава $y(T) = y(0) = 0$. Но функцията очевидно се анулира само при $x = 0$, откъдето получаваме $T = 0$ – противоречие.

3. Намираме границата на функцията когато $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = 0$$

Това означава, че абсцисната ос е *хоризонтална асимптота.*

4. Търсим наклонени асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0,$$

което означава, че функцията няма наклонени асимптоти.

5. Намираме първата производна:

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Знакът на $y'(x)$ се променя в точката $x = 1$. В интервала $(0, 1)$ тя е положителна и функцията е растяща, а в интервала $(1, +\infty)$ $y'(x) < 0$, т.е. функцията е намаляваща.

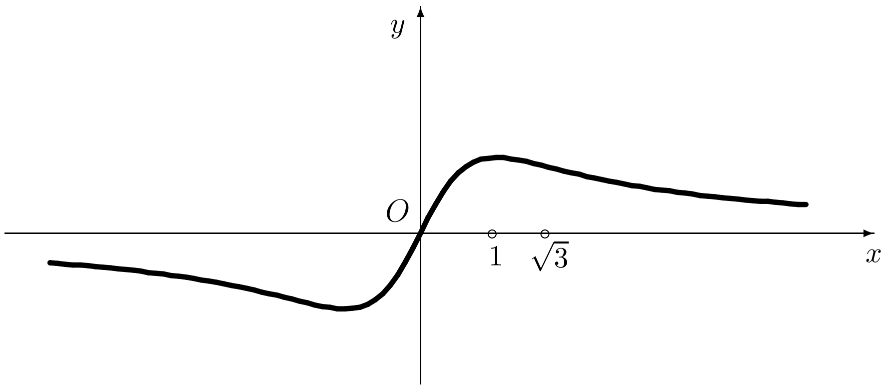
В точката $x = 1$ има локален максимум. Пресмятаме $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

6. Намираме втората производна:

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$$

В интервала $(0, \sqrt{3})$ $y'' < 0$ и функцията е вдлъбната. В интервала $(\sqrt{3}, +\infty)$ $y'' > 0$ и функцията е изпъкнала.
В точката $x = \sqrt{3}$ втората производна си сменя знака. Следователно при $x = \sqrt{3}$ функцията има *инфлексия*, т.е. точката $(\sqrt{3}, y(\sqrt{3}))$ е *инфлексна точка* на графиката на функцията. При $x = 0$ също има инфлексия .
Попълваме таблицата:

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	



3.20 Да се изследва функцията $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ и да се построи нейната графика.

Решение:

1. Функцията е дефинирана когато $x+1 \neq 0$, т.е $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Точката $x = -1$ е точка на прекъсване.

2. Пресмятаме

$$y(-x) = \frac{-x^3}{2(-x+1)^2}$$

Тъй като $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, функцията нито е четна, нито нечетна. Не е и периодична.

3. Търсим границите на функцията, когато $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty.$$

Търсим границите на функцията, когато $x \to -1^+$ и $x \to -1^-$.

$$\lim_{x\to-1^-} y(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} y(x) = -\infty$$

Следователно правата $x = -1$ е *вертикална асимптота.*

4. Търсим наклонени асимптоти:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1$$

От теорема 3.8 следва, че правата $y = \dfrac{x}{2} - 1$ е наклонена асимптота на функцията при $x \to \pm\infty$.

5. Пресмятаме първата производна:

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$$

Знакът на $y'(x)$ се променя в точките $x = -3$ и $x = -1$. В интервалите $(-\infty, -3)$ и $(-1, +\infty)$ производната е положителна и функцията е растяща, а в интервала $(-3, -1)$ е отрицателна, т.е. функцията е намаляваща.

В точката $x = -3$ има локален максимум и стойността му е $y(-3) = \dfrac{-27}{8}$.
В точката $x = -1$ функцията не е дефинирана, така че там няма екстремум. Вече знаем, че там имаме вертикална асимптота.

6. Пресмятаме втората производна:

$$y''(x) = \left(\frac{x^3 + 3x^2)}{2(x+1)^3} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3x^2 + 6x)(x+1)^3 - 3(x^3 + 3x^2)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}$$

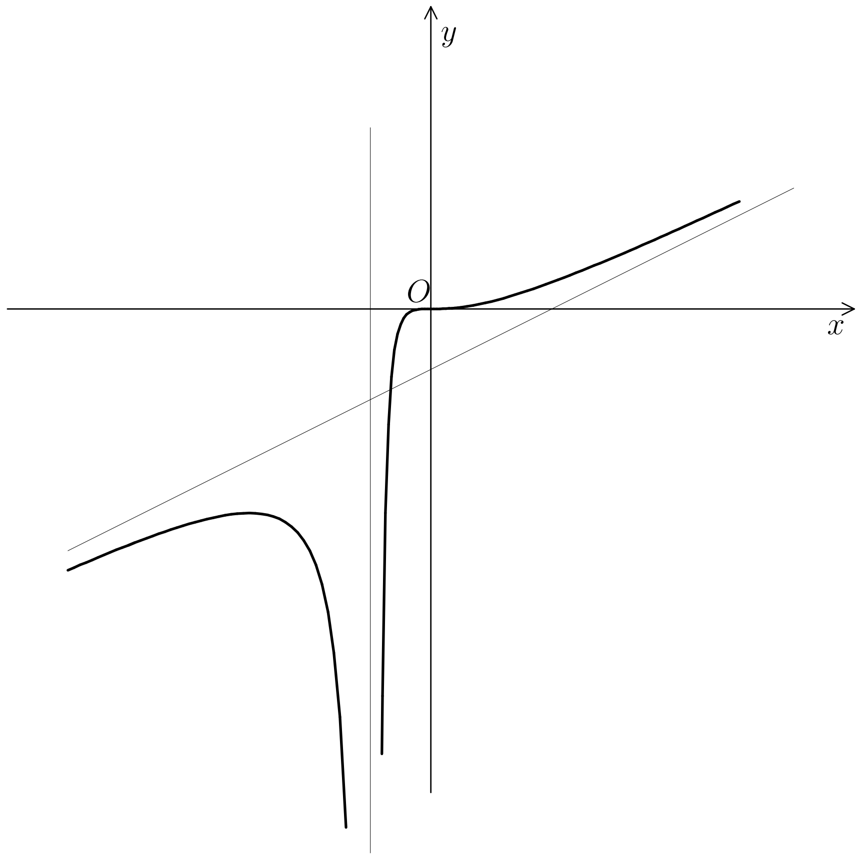
Втората производна е отрицателна при $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, т.е. функцията е вдлъбната. В интервала $(0, \infty)$ $y''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала.

При $x = 0$ има *инфлексна точка*, защото втората производна си сменя знака.

7. Пресечна точка на графиката на функция с оста Oy се получава при $x = 0$, а пресечните точки с оста Ox се получават при $y = 0$. В нашия случай, при $x = 0$ се получава $y = 0$ и при $y = 0$ се получава $x = 0$. Точката $(0, 0)$ е единствената пресечна точка на графиката с координатните оси.

Попълваме таблицата:

x	$-\infty$		-3		-1^-	-1^+		0		$+\infty$
y	$-\infty$		$-\dfrac{27}{8}$		$-\infty$	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			$+$	0	$+$	
y''		$-$		$-$			$-$	0	$+$	



3.21 Да се изследва функцията $y = \dfrac{e^{x+1}}{x-1}$ и да се построи нейната графика.

Решение:

1. Функцията е дефинирана за всяко $x \neq 1$, т.е. $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Функцията не е четна, нито нечетна, нито периодична.

3. Търсим границите на функцията, когато $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty.$$

Следователно абсцисната ос е *хоризонтална асимптота* при $x \to -\infty$.
Търсим границите на функцията, когато $x \to 1^-$ и $x \to 1^+$.

$$\lim_{x\to-1^-} y(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-1^+} y(x) = +\infty$$

Следователно правата $x = 1$ е *вертикална асимптота.*
4. Търсим наклонени асимптоти:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1}}{x(x-1)} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{x(x-1)} = +\infty$$

От теорема 3.8 следва, че функцията няма наклонена асимптота.

5. Пресмятаме първата производна:

$$y'(x) = \frac{e^{x+1}(x-1) - e^{x+1}}{(x-1)^2} = \frac{e^{x+1}(x-2)}{(x-1)^2}$$

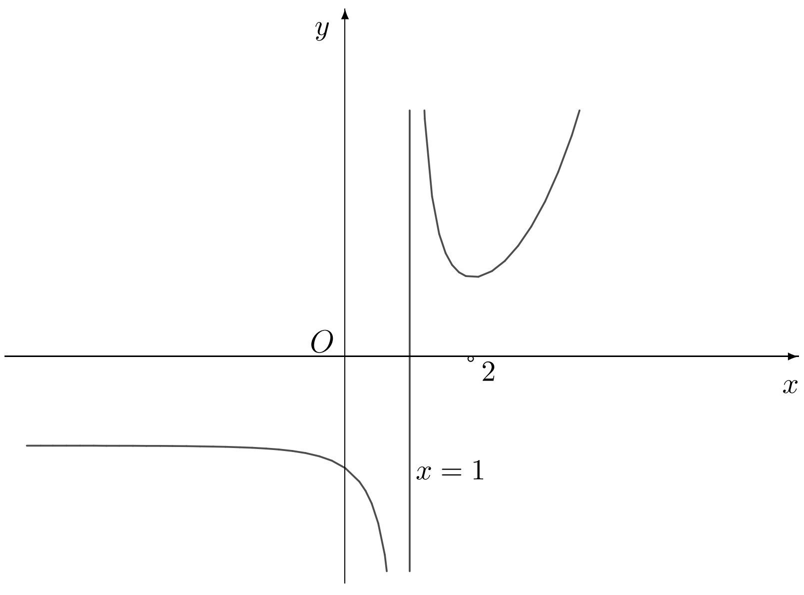
Знакът на $y'(x)$ се променя в точката $x = 2$. В интервала $(-\infty, 2)$ производната е отрицателна и функцията е намаляваща, а в интервала $(2, +\infty)$ е положителна, т.е. функцията е растяща. В точката $x = 2$ имаме локален максимум и $y(2) = e^2$.
6. Пресмятаме втората производна:

$$y''(x) = \left(\frac{e^{x+1}(x-2)}{(x-1)^2}\right)' = e^{x+1} \cdot \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-1)^3}$$

В интервала $(-\infty, 1)$ $y''(x) < 0$ и функцията е вдлъбната. В интервала $(1, +\infty)$ $y''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала. Това е така, защото $x^2 - 4x + 5 > 0$ $\forall x$.
7. При $x = 0$ се получава $y = -e$. Пресечни точки с абсцисната ос нямаме, защото $e^{x+1} > 0$.

Попълваме таблицата:

x	$-\infty$		0		1^-	1^+		2		$+\infty$
y	0	↘	$-e$	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	e^2	↗	$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	



3.22 Да се изследва функцията $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ и да се построи нейната графика.

Решение:
1. Функцията е дефинирана, когато $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$. Това неравенство е еквивалентно с $(x+1)(x-1) < 0$, т.е. $x \in (-1, 1)$.
2. Пресмятаме

$$y(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = -\ln\frac{1+x}{1-x} = -y(x)$$

Функцията е нечетна и графиката ѝ е симетрична относно началото на координатната система. Достатъчно е да изследваме функцията само в интервала $[0, 1)$.

3. Намираме $\lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty$. Следователно, правата $x = 1$ е *вертикална асимптота.*

4. Функция, която е дефинирана в **краен интервал**, може да има само вертикални асимптоти.

5. Първата производна на функцията е

$$y\,'(x) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

При $0 \le x < 1$ производната е положителна и функцията е растяща. Екстремуми няма.

6. Пресмятаме втората производна

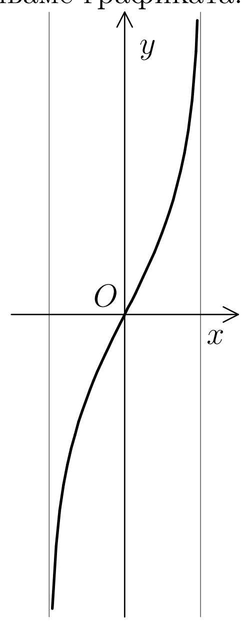
$$y''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

В интервала $(0, 1)$ втората производна е положителна, т.е. функцията е изпъкнала. В точката $x = 0$ има *инфлексия*, защото в нея $y''(x)$ си сменя знака.

7. Единствената пресечна точка на графиката с координатните оси е началото на координатната система.

Нанасяме получените резултати в таблицата и построяваме графиката:

x	0		1
y	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	
y''		$+$	



3.23 Да се изследва функцията $y = \dfrac{x}{4-x^2}$ и да се начертае нейната графика.

Решение:

1. Функцията е дефинирана когато $4 - x^2 \neq 0$, т.е $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

2. Функцията е нечетна, защото

$$y(-x) = \frac{-x}{4-(-x)^2} = -\frac{x}{4-x^2} = -y(x)$$

Поради тази причина ще я изследваме само за $x \ge 0$. Функцията не е периодична.

3. Търсим границата на функцията, когато $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)} = 0.$$

Следователно абсцисната ос е *хоризонтална асимптота.*

Търсим границите на функцията, когато $x \to 2^-$ и $x \to 2^+$.

$$\lim_{x \to 2^-} y(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} y(x) = -\infty$$

Следователно правата $x = 2$ е *вертикална асимптота.*

4. Търсим наклонени асимптоти:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$$

Следователно функцията няма наклонени асимптоти.

5. Намираме първата производна:

$$y'(x) = \left(\frac{x}{4 - x^2} \right)' = \frac{(4 - x^2) + 2x^2}{(4 - x^2)^2} = \frac{4 + x^2}{(4 - x^2)^2} > 0, \quad \text{т.е.}$$

функцията е растяща.

6. Пресмятаме втората производна:

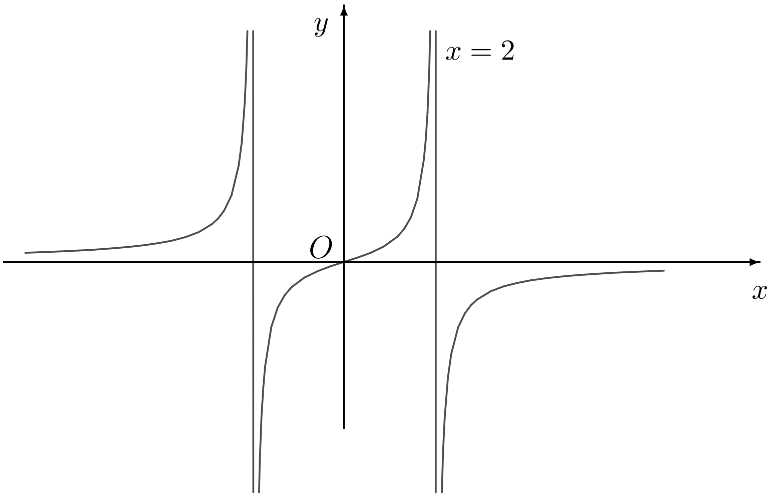
$$y''(x) = \left(\frac{4 + x^2}{(4 - x^2)^2} \right)' = \frac{2x(4 - x^2)^2 + 4x(4 + x^2)(4 - x^2)}{(4 - x^2)^4} = \frac{2x(12 + x^2)}{(2 - x)^3(2 + x)^3}$$

В интервала $(0, 2)$ $y''(x) > 0$ и функцията е изпъкнала, а в интервала $(2, +\infty)$ $y''(x) < 0$ и функцията е вдлъбната. При $x = 0$ има *инфлексна точка*, защото втората производна си сменя знака.

7. Точката $(0, 0)$ е единствената пресечна точка на графиката с координатните оси.

Попълваме таблицата и начертаваме графиката:

x	0	2^-	2^+	∞
y	0	$+\infty$	$-\infty$	0
y'	$+$		$+$	
y''	$+$		$-$	



Задачи за самостоятелна работа:

3.24 Да се изследва функцията $y = 2|x| - x^2$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	0		1		2		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y'	$\nexists$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	

Функцията е четна.
Асимптоти няма.

3.25 Да се изследва функцията $y = \dfrac{x-1}{x^2}$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	$-\infty$		0^-	0^+		2		3		$+\infty$
y	0		$-\infty$	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{9}$		0
y'		$-$	$-$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

3.26 Да се изследва функцията $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		$+\infty$
y	-1		-0.5		0		1
y'	0	$+$		$+$	$+$	$+$	
y''		$+$	0	$-$	$-$	$-$	

Функцията е четна. Правата $y = 1$ е хоризонтална асимптота.

3.27 Да се изследва функцията $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	$-\infty$		0		1^-	1^+		2		$+\infty$
y	$-\infty$		-2		$-\infty$	$+\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	

Правата $x = 1$ е вертикална асимптота.
Правата $y = x - 2$ е наклонена асимптота.

3.28 Да се изследва функцията $y = x\sqrt{x - x^2}$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	0		$\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$		$\dfrac{3}{4}$		1
y	0		≈ 0.15		$\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$		0
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	0	$-$	$-$	$-$	

Асимптоти няма.

3.29 Да се изследва функцията $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	$-\infty$		0		2^-		3^+		$+\infty$
y	$+\infty$		$\ln 6$		$-\infty$		$-\infty$		$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	$-$		$-$	$-$	

Вертикални асимптоти: $x = 2$ и $x = 3$.

3.30 Да се изследва функцията $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	0^+		1		$\sqrt{e}$		$\sqrt[6]{e^5}$		$+\infty$
y	$-\infty$		0						0
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

Абсцисната ос е хоризонтална асимптота.

3.31 Да се изследва функцията $y = \dfrac{\ln x - 1}{x}$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	0^+		e		e^2		$\sqrt{e^5}$		$+\infty$
y	$-\infty$		0						0
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

Абсцисната ос е хоризонтална асимптота.

3.32 Да се изследва функцията $y = x^2 e^{-x}$ и да се начертае нейната графика.

Отг.

x	$-\infty$		0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$		0		≈ 0.19		$4e^{-2}$		≈ 0.38		0
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	

Абсцисната ос е хоризонтална асимптота.

3.33 Да се изследва функцията $y = \dfrac{1}{2}(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ и да се построи нейната графика.

Отг.

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{2}{5}$		0^-	0^+		2		$+\infty$
y	$-\infty$		$\dfrac{1}{2e}$		$\dfrac{4}{5}e^{-\frac{5}{2}}$		0	$+\infty$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$			$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$			$+$	$+$	$+$	

Ординатната ос е вертикална асимптота. Правата $y = \dfrac{x+3}{2}$ е наклонена асимптота.

Глава 4

Неопределен интеграл

Целта на тази глава е да запознае читателя с понятието неопределен интеграл и някои основни методи за интегриране: непосредствено интегриране, интегриране чрез полагане, интегриране по части, интегриране на рационални, ирационални и тригонометрични функции.

Понятието неопределен интеграл е свързано с действието, което е обратно на диференцирането. Намирането на функция, чиято производна е равна на дадена функция, се нарича интегриране и методите за интегриране се оказват доста по-сложни от методите за диференциране.

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в даден интервал.

Дефиниция 4.1 *Ще казваме, че функцията $F(x)$, дефинирана в същия интервал, е* ***примитивна функция*** *на $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцируема в този интервал и $F'(x) = f(x)$.*

Теорема 4.1 *Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$ в един интервал, то всяка друга примитивна на $f(x)$ има вида $F(x) + C$, където C е константа.*

Доказателство: Да означим с $\Phi(x)$ произволна примитивна на $f(x)$ и да разгледаме функцията $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Тогава

$$\varphi'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

за всяко x в дадения интервал. Тогава според основната теорема на интегралното смятане функцията $\varphi(x)$ е константа в този интервал, т.е. $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) = C$. Следователно $\Phi(x) = F(x) + C$.

Дефиниция 4.2 *Множеството от всички примитивни функции на функцията $f(x)$ се нарича* ***неопределен интеграл*** *и се означава с*

$$\int f(x)\,dx,$$

а функцията $f(x)$ се нарича ***подинтегрална функция***, *т.е.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{където} \qquad F'(x) = f(x)$$

Намирането на примитивните функции на дадена функция $f(x)$ се нарича **интегриране** на $f(x)$.

4.1 $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$, защото $(e^x)' = e^x$.

4.2 $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$, защото $(\sin x)' = \cos x$.

4.3 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, защото $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Свойства:

1. $\displaystyle\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

Доказателство: $\displaystyle\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

2. $\displaystyle\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)$

3. $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ *a-константа*

Доказателство: $\displaystyle\left(a\int f(x)\,dx\right)' = a.(F(x)+C)' = a.F'(x) = a.f(x)$

4. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Доказателство:

$$\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) + g(x)$$

5. Ако $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$$

Доказателство: $(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x)).\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

ТАБЛИЧНИ ИНТЕГРАЛИ

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + C$

4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C \qquad (a \neq 0)$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Доказателството на формулите следва директно, като се диференцират функциите от дясната страна на равенствата.

Формула 12 може да се получи и по следния начин:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

Следователно

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{x-a}\,dx-\int\frac{1}{x+a}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{x-a}\,d(x-a)-\int\frac{1}{x+a}\,d(x+a)\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

В следващите редове ще се запознаем с някои елементарни методи за интегриране. Под **непосредствено интегриране** ще разбираме пресмятане на неопределени интеграли чрез прилагане на основните свойства и табличните интеграли. Ще демонстрираме този метод с няколко примера.

4.4 $\displaystyle\int(x^4+4x^3-3x+1)\,dx=\int x^4\,dx+4\int x^3\,dx-3\int x\,dx+\int 1\,dx=$

$$=\frac{x^5}{5}+4\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{1}{5}x^5+x^4-\frac{3}{2}x^2+x+C$$

4.5 $\displaystyle\int\frac{x^6+5x^3\sqrt{x}-3x+2}{x^2}\,dx=\int x^4\,dx+5\int x\sqrt{x}\,dx-3\int\frac{1}{x}\,dx+2\int\frac{1}{x^2}\,dx=$

$$=\frac{x^5}{5}+5\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-3\ln|x|+2\int x^{-2}\,dx=\frac{1}{5}x^5+2x^{\frac{5}{2}}-3\ln|x|-\frac{2}{x}+C$$

В следващите няколко примера ще демонстрираме прилагането на свойство 5, в случая когато $\varphi(x)=ax+b$. Тогава имаме

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\qquad a,b\text{ - }\textit{константи}$$

4.6 $\displaystyle\int\frac{1}{3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{3x+2}\,d3x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{3x+2}\,d(3x+2)=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$

4.7 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,d2x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,d(2x-11)=$

$$=\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(2x-11)+C$$

4.8 $\displaystyle\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,dx = 4\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,d\frac{x}{4} = 4\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,d(\frac{x}{4}-5) = -4\cos(\frac{x}{4}-5)+C$

4.9 $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

4.10 $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \int \cos 2x\,dx\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

4.11 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}.a\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$

4.12 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\,dx = \frac{1}{a}.a\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\,d\frac{x}{a} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

От разгледаните примери се вижда, че имаме право да умножим променливата x след знака за диференциал с число, но трябва да компенсираме с деление пред знака за интеграл със същото число. След знака за диференциал можем да прибавяме или изваждаме числа, каквито са ни необходими, за да получим табличен интеграл.

Следващите няколко примера ще съдържат квадратни тричлени и основната операция за пресмятането им ще бъде операцията **отделяне на точен квадрат**.

4.13 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,d(x-2) =$
$= \mathrm{arctg}(x-2) + C$

4.14 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-4}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-2^2}\,d(x+3) =$
$\displaystyle= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right| + C$

4.15 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+12}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2-4}}\,d(x+4) =$

$$= \ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+12}| + C$$

4.16 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2-4x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3-(4x^2+4x+1-1)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(2x+1)^2}}\,dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2^2-(2x+1)^2}}\,d(2x+1) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+1}{2} + C$

Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Както знаем, ако $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$. В такъв случай имаме

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,d\varphi(x)$$

Когато прилагаме това равенство ще казваме, че внасяме функцията $\varphi'(x)$ под знака на диференциала или че извършваме действието внасяне под знака на диференциала. То се състои в това, че вместо функцията $\varphi'(x)$, която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция. Поради тази причина често казваме, че внасянето под знака на диференциала е интегриране и внасяме под знака на диференциала функции, които лесно се интегрират (например има ги в табличните интеграли). Ползата от това действие се вижда ясно при прилагане на свойство 5.

4.17 $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала $\cos x$) $\displaystyle= \int \sin x\,d\sin x =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

4.18 $\displaystyle 2\int xe^{x^2}\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала x) $\displaystyle= \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2} + C$

4.19 $\displaystyle 2\int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала x)$=$

$\displaystyle= \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = \ln|x^2+1| + C$

4.20 $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\sin x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x = \int (\cos^2 x - 1)\,d\cos x =$

$\displaystyle= \int \cos^2 x\,d\cos x - \int 1\,d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

4.21 $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\ln|\cos x| + C$

4.22 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,d\frac{x}{2} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,d\frac{x}{2} =$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\, d\, \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

4.23 $$\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\, d\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Интегриране чрез смяна на променливата (полагане, субституция)

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала D, а $x = \varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала D_1 и е обратима. Тогава

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt + C$$

Равенството трябва да се разбира по следния начин: лявата страна на равенството е равна на дясната, ако след интегрирането направим субституцията $x = \varphi(t)$ и изберем подходяща константа C.
Доказателство:

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\, dx = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\, dx\right).\frac{dx}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Следователно, ако във функцията $\int f(x)\, dx$ направим полагането $x = \varphi(t)$, ще получим примитивна функция на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$ е също примитивна функция на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, а както знаем две примитивни се различават само с константа.

Интегриране чрез смяна на променливата (полагане) ще прилагаме, когато желаем да пресметнем $\int f(x)\, dx$ и можем да подберем функцията $\varphi(t)$ така, че след заместването на x с $\varphi(t)$ полученият интеграл да е по-лесен за пресмятане.

4.24 $$I = \int \frac{1}{2+\sqrt{x+3}}\, dx$$

Ако в интеграла направим субституцията $x = t^2 - 3,\ \ (x + 3 \geq 0)$, то $\sqrt{x+3} = t$ и $dx = 2tdt$. Тогава интегралът добива вида $I = \int \frac{2t}{2+t}\, dt = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}\, dt =$

$$= 2\left(\int 1\, dt - 2\int \frac{1}{t+2}\, d(t+2)\right) = 2t - 4\ln|t+2| + C = 2\sqrt{x+3} - 4\ln(2+\sqrt{x+3}) + C$$

4.25 $$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (a > 0)$$

Ако в интеграла направим субституцията $x = a\sin t$, то $dx = a\cos t dt$ и

$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=a\cos t$. Тогава интегралът добива вида

$$I=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(\int 1\,dt+\int\cos 2t\,dt\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\int 1\,dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t\,d2t\right)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C=$$

$=\dfrac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)+C.$ Но $t=\arcsin\frac{x}{a}$ и следователно

$$I=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+$$
$$C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

4.26 $\quad I=\displaystyle\int\frac{1}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}}\,dx \qquad (a>0)$

Ако в интеграла направим субституцията

$x=a\,\mathrm{tg}\,t,\quad$ то $\quad\sqrt{x^2+a^2}=\dfrac{a}{\cos t}\quad$ и $\quad dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt.$

Тогава интегралът добива вида $\quad I=\displaystyle\int\frac{a\cos^3 t}{a^3\cos^2 t}\,dt=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C=$

$=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\mathrm{tg}\,t}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t}}+C\quad$. Но $t=\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}$ и $I=\dfrac{1}{a^2}\sin\left(\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}\right)+C=\dfrac{1}{a^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C.$

4.27 $\quad I=\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \qquad (a>0)$

Ако в интеграла направим субституцията

$x=\dfrac{a}{\cos t},\quad$ то $\quad\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{tg}\,t\quad$ и $\quad dx=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$

Тогава интегралът добива вида $\quad I=\displaystyle\frac{1}{a}\int\frac{\sin t\cos^2 t}{\sin t\cos^2 t}\,dt=\frac{1}{a}\int 1\,dt=\frac{1}{a}t+C$

Но $t=\arccos\dfrac{a}{x}$ и $I=\dfrac{1}{a}\arccos\dfrac{a}{x}+C$

Интегриране по части

Нека $u=u(x)$ и $v=v(x)$ са две диференцируеми в даден интервал функции. Тогава

$$(uv)'=u'v+uv'$$

Следователно

$$uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx$$

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Последното равенство се нарича формула за интегриране по части.

4.28 $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x(\ln x - 1) + C$

4.29 $5\int x^4 \ln x\,dx =$ (внасяме x^4 под знака на диференциала) $= \int \ln x\,dx^5 = x^5\ln x - \int x^5 d\ln x = x^5 \ln x - \int x^5\frac{1}{x}dx = x^5\ln x - \int x^4 dx = x^5\ln x - \frac{x^5}{5} + C$

4.30 $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(x^2+1) = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$

4.31 $2\int x\operatorname{arctg} x\,dx =$ (внасяме x под знака на диференциала) $=$

$$= \int \operatorname{arctg} x\,dx^2 = x^2\operatorname{arctg} x - \int x^2 d\operatorname{arctg} x =$$

$$= x^2\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x^2\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x^2\operatorname{arctg} x - \int 1\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C$$

4.32 $\int x^3e^x\,dx = \int x^3\,de^x = x^3e^x - \int e^x\,dx^3 = x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx = x^3e^x - 3\int x^2\,de^x = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - \int e^x\,dx^2\right) = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\right) =$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x\,dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int x\,de^x = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) =$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

4.33 $\int x^2\cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2\sin x - \int \sin x\,dx^2 = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$

$$= x^2 \sin x + 2\int x\, d\cos x = x^2 \sin x + 2\left(x\cos x - \int \cos x\, dx\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

4.34 $I = \int e^x \sin x\, dx = \int \sin x\, de^x = e^x \sin x - \int e^x\, d\sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int \cos x\, de^x = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x\, d\cos x\right) =$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx = e^x(\sin x - \cos x) - I$$

Следователно

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

Интегриране на рационални функции

Да припомним, че **рационална функция** се нарича функция от вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми. Ако степента на числителя е по-малка от степента на знаменателя, рационалната функция се нарича **правилна.**

Рационални функции от вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \qquad (p^2 - 4p < 0)$$

се наричат **елементарни дроби** от **първи** и **втори** вид.

Всяка правилна рационална функция (правилна дроб) може да се представи във вида

$$\frac{f(x)}{(x-a)^k \dots (x^2+px+q)^m \dots} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)} +$$

$$+ \dots + \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \dots + \frac{M_m x + N_m}{x^2+px+q} + \dots$$

Ако рационалната функция не е правилна дроб, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \qquad \text{където } \frac{r(x)}{g(x)} \text{ е правилна дроб.}$$

Следователно при интегриране на рационална функция основната задача се свежда до пресмятането на интеграли от елементарни дроби.

При пресмятане на $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx$ имаме два случая:

1. Ако $k=1$, тогава $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = \int \frac{A}{x-a}\,d(x-a) = A\ln|x-a| + C$

2. Ако $k>1$, тогава $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$

Пресмятането на $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx$ е по-трудно и ще разгледаме първите два случая:

1. Ако $m=1$, тогава $\displaystyle I_1 = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$

Основните стъпки при пресмятането на този интеграл са: отделяне на точен квадрат в знаменателя, полагане, преобразуване и пресмятане на два интеграла, единият от които е табличен, а другият става табличен след внасяне под знака на диференциала. Ще демонстрираме пресмятането със следващите два примера:

4.35 $\displaystyle I_1 = \int \frac{4x+1}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{4x+1}{x^2+4x+4-4+13}\,dx = \int \frac{4x+1}{(x+2)^2+9}\,dx$

Полагаме $x+2=t$, т.е. $x=t-2$ и $dx=dt$.

$$I_1 = \int \frac{4(t-2)+1}{t^2+9}\,dt = \int \frac{4t-7}{t^2+9}\,dt = \int \frac{4t}{t^2+9}\,dt - 7\int \frac{1}{t^2+9}\,dt = 2\int \frac{1}{t^2+9}\,dt^2$$

$$-7\int \frac{1}{t^2+3^2}\,dt = 2\int \frac{1}{t^2+9}\,d(t^2+9) - 7\int \frac{1}{t^2+3^2}\,dt = 2\ln|t^2+9| - 7\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C$$

$$I_1 = 2\ln|x^2+4x+13| - \frac{7}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C$$

4.36 $\displaystyle I_1 = \int \frac{6x+5}{x^2-6x+5}\,dx = \int \frac{6x+5}{x^2-6x+9-9+5}\,dx = \int \frac{6x+5}{(x-3)^2-4}\,dx.$

Полагаме $x-3=t$, т.е. $x=t+3$ и $dx=dt$.

$$I_1 = \int \frac{6(t+3)+5}{t^2-4}\,dt = \int \frac{6t+23}{t^2-4}\,dt = \int \frac{6t}{t^2-4}\,dt + 23\int \frac{1}{t^2-4}\,dt = 3\int \frac{1}{t^2-4}\,dt^2$$

$$+23\int \frac{1}{t^2-2^2}\,dt = 3\int \frac{1}{t^2-4}\,d(t^2-4) + 23\int \frac{1}{t^2-2^2}\,dt = 3\ln|t^2-4| + \frac{23}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C$$

$$I_1 = 3\ln|x^2-6x+5| + \frac{23}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$$

2. Ако $m=2$, тогава $I_2 = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^2}\,dx.$

Отново ще демонстрираме пресмятането на този интеграл с пример.

4.37 $\displaystyle I_2 = \int \frac{2x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = \int \frac{2x+1}{(x^2+4x+4+1)^2}\,dx = \int \frac{2x+1}{((x+2)^2+1)^2}\,dx.$

Полагаме $x+2=t$, т.е. $x=t-2$ и $dx=dt$.

$$I_2 = \int \frac{2(t-2)+1}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{2t-3}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt - 3\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,d(t^2) - 3\int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,d(t^2+1) - 3\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt + 3\int \frac{t.t}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,d(t^2+1) - 3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,d(t^2+1) = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,d(t^2+1)$$

$$-\,3\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{3}{2}\int t\,d\frac{1}{t^2+1} = -\frac{1}{t^2+1} - 3\operatorname{arctg} t - \frac{3}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} - \int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) =$$

$$-\frac{1}{t^2+1} - 3\operatorname{arctg} t - \frac{3}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arctg} t\right) =$$

$$-\frac{1}{t^2+1} - \frac{3t}{2(t^2+1)} - 3\operatorname{arctg} t + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t = -\frac{2+3t}{2(t^2+1)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t + C$$

$$I_2 = -\frac{3x+8}{2(x^2+4x+5)} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C$$

Следват още няколко задачи от интегриране на рационални функции:

4.38 $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x^2+1)}\right)dx =$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{-1}{2(x-1)} + \ln|x-1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$$

4.39 $$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-1}\,dx = \int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx - \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$\int \frac{3}{x-1}\,d(x-1) - \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = 3\ln|x-1| - \ln|x^2+1| + C$$

4.40 $$\int \frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx$$

Тъй като степента на полинома в числителя е по-висока от степента на полинома в знаменателя, първо трябва да извършим делението. Получаваме

$$\frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x} = x-3+\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$$

След това разлагаме дробта $\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}$ на сума от елементарни дроби.

$$\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x} = \frac{6x^3+3x+1}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

Привеждаме под общ знаменател, приравняваме числителите и получаваме

$$6x^3+3x+1 = A(x+1)^3 + Bx + Cx(x+1) + Dx(x+1)^2$$

От последното равенство при $x=0$ и $x=-1$ получаваме съответно $A=1$ и $B=8$. Останалите две неизвестни намираме от системата (получава се при $x=1$ и $x=2$)

$$\left|\begin{array}{rcr} C+2D &=& -3 \\ 3C+9D &=& 6 \end{array}\right.$$

т.е. $C=-13, \quad D=5$.

Следователно

$$\frac{6x^3+3x+1}{x^4+3x^3+3x^2+x} = \frac{6x^3+3x+1}{x(x+1)^3} = \frac{1}{x} + \frac{8}{(x+1)^3} + \frac{-13}{(x+1)^2} + \frac{5}{x+1}$$

Тогава

$$\int \frac{x^5-8x^2+1}{x^4+3x^3+3x^2+x}\,dx = \int x\,dx - 3\int 1\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{8}{(x+1)^3}\,dx + \int \frac{-13}{(x+1)^2}\,dx$$

$$+\int \frac{5}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + \ln|x| - 4(x+1)^{-2} + 13(x+1)^{-1} + 5\ln|x+1| + C$$

4.41 $\displaystyle\int \frac{5x^2+9x+25}{x^3+3x^2+4x-8}\,dx$

Разлагаме подинтегралната функция на сума от елементарни дроби:

$$\frac{5x^2+9x+25}{x^3+3x^2+4x-8} = \frac{5x^2+9x+25}{(x-1)(x^2+4x+8)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+4x+8}$$

$$5x^2+9x+25 = A(x^2+4x+8) + (Mx+N)(x-1)$$

В последното равенство заместваме $x=1$ и получаваме $A=3$.

$$5x^2+9x+25 = 3(x^2+4x+8) + (Mx+N)(x-1)$$

Сега заместваме с $x=0$ и намираме $N=-1$.

$$5x^2+9x+25 = 3(x^2+4x+8) + (Mx-1)(x-1)$$

Заместваме с $x=2$ и намираме $M=2$. Следователно разлагането е

$$\frac{5x^2+9x+25}{x^3+3x^2+4x-8} = \frac{3}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2+4x+8}$$

Тогава

$$\int \frac{5x^2+9x+25}{x^3+3x^2+4x-8}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{2x-1}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{3}{x-1}\,d(x-1) +$$

$$\int \frac{2x-1}{(x+2)^2+4}\,dx = 3\ln|x-1| + \int \frac{2x-1}{(x+2)^2+4}\,dx$$

Интегралът $\displaystyle\int \frac{2x-1}{(x+2)^2+4}\,dx$ решаваме както задача 4.34.

Полагаме $x+2=t$, т.е. $x=t-2$ и $dx=dt$.

$$\int \frac{2t-5}{t^2+4}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+4}\,dt - \int \frac{5}{t^2+4}\,dt = \int \frac{1}{t^2+4}\,d(t^2+4) - \int \frac{5}{t^2+2^2}\,dt =$$

$$\ln|t^2+4| - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \ln|x^2+4x+8| - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C$$

Интегриране на ирационални функции

Интеграл от вида

$$\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}})\,dx$$

се свежда до интеграл от дробна рационална функция чрез полагането

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, \qquad \text{където} \quad k = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

4.42 $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

Полагаме $x+1 = t^6$, т.е. $x = t^6 - 1$ и $dx = 6t^5 dt$.

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt[3]{x+1}}\,dx = 6\int \frac{(1-t^3)t^5}{(t^6-1)t^2}\,dt = 6\int \frac{(1-t^3)t^3}{(t^6-1)}\,dt = -6\int \frac{(t^3-1)t^3}{(t^3-1)(t^3+1)}\,dt =$$

$$-6\int \frac{t^3}{t^3+1}\,dt = -6\int \frac{t^3+1-1}{t^3+1}\,dt = -6\int 1\,dt + 6\int \frac{1}{t^3+1}\,dt =$$

$$-6t + 6\int \frac{1}{(t+1)(t^2+t+1)}\,dt$$

Последният интеграл е от дробна рационална функция и се решава както зад.4.41 (*направете това сами*).

Интеграл от вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

се свежда до интеграл от дробна рационална функция чрез една от следните три **субституции на Ойлер**

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} 1. \quad t \pm x\sqrt{a}, & a > 0 \\ 2. \quad tx \pm \sqrt{c}, & c > 0 \\ 3. \quad t(x-x_1), & ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \end{cases}$$

4.43 $\displaystyle\int \frac{2}{x-\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

Полагаме $\sqrt{x^2-x+1} = t + x$, т.е. $x = \dfrac{1-t^2}{1+2t}$ и $dx = -2\dfrac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$

Заместваме в интеграла и получаваме

$$4\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt = \int \frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}\,dt$$

Последният интеграл е от дробна рационална функция и за решаването му е необходимо да разложим подинтегралната функция на сума от елементарни дроби

$$\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{(t+\frac{1}{2})^2}+\frac{C}{t+\frac{1}{2}}$$

$$t^2+t+1=A\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+Bt+Ct\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

От последното равенство при $t=0$ получаваме $A=4$.

$$t^2+t+1=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+Bt+Ct\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

При $t=-0.5$ получаваме $B=-\frac{3}{2}$.

$$t^2+t+1=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}t+Ct\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

Сега при $t=1$ следва, че $C=-3$. Следователно

$$\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{t}-\frac{3}{2}\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2}-\frac{3}{t+\frac{1}{2}}$$

$$\int\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}\,dt=4\int\frac{1}{t}\,dt-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2}\,dt-3\int\frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$4\int\frac{1}{t}\,dt-\frac{3}{2}\int\frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2}\,d(t+\frac{1}{2})-3\int\frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,d(t+\frac{1}{2})=$$

$$4\ln|t|+\frac{3}{2}\frac{1}{t+\frac{1}{2}}-3\ln|t+\frac{1}{2}|+C$$

Интегриране на тригонометрични функции

Интеграл от вида $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ се свежда до интеграл от дробна рационална функция чрез универсалната субституция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.
Тогава

$$x=2\operatorname{arctg}t \quad \text{и} \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4.44 $$\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\left(2+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{t^2+2t+3}\,dt =$$

$$2\int \frac{1}{(t+1)^2+(\sqrt{2})^2}\,d(t+1) = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}} + C$$

Ако рационалната функция $R(x, y)$ е четна спрямо двата си аргумента, т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

субституцията $\operatorname{tg} x = t$ ще ни доведе до дробна рационална функция, в която съставящите я полиноми са от по-ниска степен. Тогава

$$x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{1}{1+t^2}dt$$

и

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

4.45 $$\int \frac{1}{4\sin^2 x+3\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{4\frac{t^2}{1+t^2}+3\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{4t^2+3}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(2t)^2+(\sqrt{3})^2}\,d(2t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C$$

Интеграли, които не се изразяват чрез елементарни функции

Досега разгледахме различни методи за интегриране, но не си зададохме въпроса дали всяка функция има примитивна? Докато производната на елементарна функция е отново елементарна функция, то при операцията интегриране не за всяка елементарна функция съществува примитивна функция, която пак да е елементарна функция. Например, примитивната на $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ не е елементарна функция.

Ако примитивната функция $F(x)$ на дадена елементарна функция $f(x)$ не е елементарна функция, казва се, че интегралът $\int f(x)\,dx$ е нерешим.

Да се установи, че даден интеграл е нерешим е трудна задача и изисква сложни математически изследвания.

Добре са изучени следните примитивни функции (нерешими интеграли), които често се срещат в приложенията на математиката, механиката и в инженерните изследвания:

$Li\,(x) = \int \frac{1}{\ln\ x}\,dx,$ наречена "Интегрален логаритъм"

$Si\,(x) = \int \frac{\sin\ x}{x}\,dx,$ наречена "Интегрален синус"

$Ci\,(x) = \int \frac{\cos\ x}{x}\,dx,$ наречена "Интегрален синус"

$Ei\,(x) = \int \frac{e^x}{x}\,dx,$ наречена "Интегрална показателна функция"

$\Phi\,(x) = \int e^{-x^2}\,dx$ – "Интеграл на вероятностите или Функция на Лаплас"

$S\,(x) = \int \sin\ x^2\,dx, \quad C\,(x) = \int \cos\ x^2\,dx,$ – "Интеграли на Френел"

$E(x) = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\ x}\ dx,$ – "Елиптичен интеграл на Лежандър от първи род"

$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\ x}}\,dx,$ – "Елиптичен интеграл на Лежандър от втори род"

Задачи за самостоятелна работа:

4.46 $\int (5x^4 - 4x^3 + x - 1)\,dx$ Отг. $x^5 - x^4 + \frac{x^2}{2} - x + C$

4.47 $\int \left(x^3 + 3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\,dx$ Отг. $\frac{x^4}{4} + 2x\sqrt{x} - \ln|x| + C$

4.48 $\int \left(x^2 - 3\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)\,dx$ Отг. $\frac{x^3}{3} - 2x\sqrt{x} + \frac{2}{x} + C$

4.49 $\int \frac{x^5 + 3x^2 - 1}{x^2}\,dx$ Отг. $\frac{x^4}{4} + 3x + \frac{1}{x} + C$

4.50 $\displaystyle\int \frac{x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1}{x^2}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{x^5}{5} - x^3 + 2x - \ln|x| - \frac{1}{x} + C$

4.51 $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + C$

4.52 $\displaystyle\int \frac{1}{4x+13}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln|4x+13| + C$

4.53 $\displaystyle\int \cos(2x-1)\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{1}{2}\sin(2x-1) + C$

4.54 $\displaystyle\int \left(e^{2x-213} - \sin(5x+3)\right)\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{1}{2}e^{2x-213} + \frac{1}{5}\cos(5x+13) + C$

4.55 $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+25}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{1}{10}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{5} + C$

4.56 $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2-16}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C$

4.57 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+20}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{4} + C$

4.58 $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+8x+12}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x+6}\right| + C$

4.59 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx$ Отв. $\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+10}| + C$

4.60 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$ Отв. $\displaystyle\arcsin\frac{x-2}{3} + C$

4.61 $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ Отв. $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$

4.62 $\displaystyle\int 3x^2 e^{x^3}\,dx$ Отв. $e^{x^3} + C$

4.63 $\int 7\cos x \sin^6 x\, dx$ Отг. $\sin^7 x + C$

4.64 $\int 3\cos^3 x \sin^2 x\, dx$ Отг. $\sin^3 x - \dfrac{3\sin^5\ x}{5} + C$

4.65 $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+5}\, dx$ Отг. $\ln|x^2+x+5| + C$

4.66 $\int \dfrac{3}{\sqrt[5]{(5x+1)^2}}\, dx$ Отг. $\sqrt[5]{(5x+1)^3} + C$

4.67 $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\, dx$ Отг. $\sqrt{x^2+x+2} - \dfrac{1}{2}\ln\left|x + \dfrac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+2}\right| + C$

4.68 $\int \dfrac{x}{\sqrt[4]{x+1}}\, dx$ Отг.$\dfrac{4}{7}\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^7 - \dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3 + C$

4.69 $\int \dfrac{x}{\sqrt{x+2}-1}\, dx$ Отг. $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x+2}\right)^3 + x - 2\sqrt{x+2} - 2\ln|\sqrt{x+2}-1| + C$

4.70 $\int \dfrac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\, dx$

Отг. $\dfrac{3x+4}{3} - \dfrac{(\sqrt[3]{3x+4})^2}{2} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln|1+\sqrt[3]{3x+4}| + C$

4.71 $\int \ln(2x-5)\, dx$ Отг. $x\ln(2x-5) - x - \dfrac{5}{2}\ln|2x-5| + C$

4.72 $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\, dx$ Отг. $-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C$

4.73 $\int \ln(x^2+1)\, dx$ Отг. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\, x + C$

4.74 $\int 2xe^{2x}\, dx$ Отг. $xe^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$

4.75 $\int x^2 e^{-x}\, dx$ Отг. $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

4.76 $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\, dx$ Отг. $-\dfrac{1}{2}x^2 \cos 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$

4.77 $\displaystyle\int (x+1)\cos 3x\, dx$ Отг. $\dfrac{1}{3}(x+1)\sin 3x + \dfrac{1}{9}\cos 3x + C$

4.78 $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$ Отг. $x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$

4.79 $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^2-6x+13}\, dx$ Отг. $\dfrac{3}{2}\ln|x^2-6x+13| + \operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2} + C$

4.80 $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}\, dx$ Отг. $4\ln|x| - 3\ln|x-1| - \dfrac{9}{x-1} + C$

4.81 $\displaystyle\int \frac{x^2+11x+14}{(x+3)(x^2-4)}\, dx$ Отг. $\ln|x+2| + 2\ln|x-2| - 2\ln|x+3| + C$

4.82 $\displaystyle\int \frac{5x^2+4x+11}{(x-1)(x^2+4x+5)}\, dx$
Отг. $2\ln|x-1| + \dfrac{3}{2}\ln|x^2+4x+5| - 7\operatorname{arctg}(x+2) + C$

4.83 $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+21}{(x+3)(x^2-6x+18)}\, dx$
Отг. $\ln|x+3| + \ln|x^2-6x+18| + \dfrac{7}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{3} + C$

4.84 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-1}\, dx$ Отг. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$

4.85 $\displaystyle\int \frac{4x^3-x^2+11x-4}{(x^2-1)(x^2+4)}\, dx$ Отг. $\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + \ln\sqrt{x^2+4} + C$

4.86 $\displaystyle\int \ln(x^3-1)\, dx$
Отг. $x\ln|x^3-1| - 3x - \ln|x-1| + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

4.87 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}\, dx$ Отг. $6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$

4.88 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$

4.89 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C$

4.90 $\displaystyle\int \frac{\left(1-\sqrt{x^2+x+1}\right)^2}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

Отг. $\displaystyle-\frac{2(\sqrt{x^2+x+1}-1)}{x} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{x-\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C$

4.91 $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + C$

4.92 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{1-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} - x + C$

4.93 $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$

4.94 $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$

4.95 $\displaystyle\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx$ Отг. $\displaystyle x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$

4.96 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{20}\operatorname{arctg}\frac{5x}{4\sqrt{9-x^2}} + C$