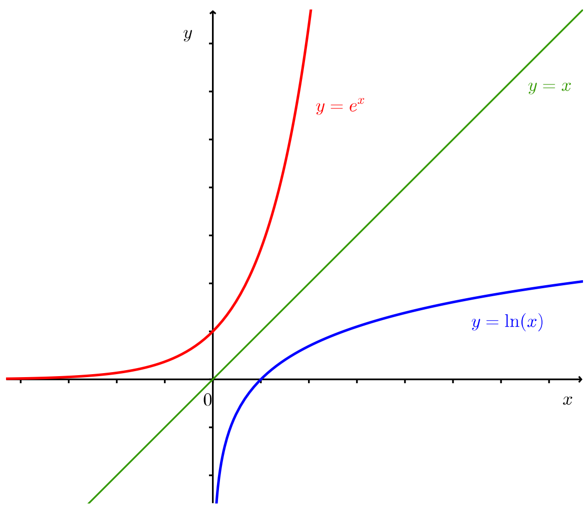
РУМЕН НИКОЛОВ ДАСКАЛОВ

М А Т Е М А Т И К А



Учебник за студентите от специалност
компютърен дизайн в индустрията
на ТУ-Габрово

Габрово, 2015

Автори: Авторът е преподавател в катедра “Математика“ на Технически университет - Габрово

проф. дмн Румен Николов Даскалов е завършил ФМИ на СУ“Св. Кл. Охридски“. Защитил е дисертационен труд в областта на комбинаторната теория на кодирането. Член е на American Mathematical Society (AMS), The Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) и Съюз на математиците в България (СМБ).

М А Т Е М А Т И К А,

Учебник за студенти от специалност компютърен дизайн в индустрията (КДИ).

Първо издание, 154 стр.

ПРЕДГОВОР

Учебникът “Математика“ е предназначен за студентите от от Технически университет - Габрово с образователно-квалификационна степен “бакалавър“.

Основната цел на учебника е да намери необходимия баланс между последователното, логическо изграждане на математическите понятия и усвояването им от бъдещите инженери като основен апарат за изучаване на съответните общотехнически и специални дисциплини и използването им в бъдещите приложни и научни изследвания. В съответствие с ограничения хорариум, ударението е поставено на втората страна, като изложението е подкрепено с множество примери и подробно решени задачи.

Разгледани са следните раздели: комплексни числа; матрици; детерминанти; системи линейни уравнения; вектори; прави в равнината; елипса, хипербола и парабола, функция, граница на функция, производна на функция, изследване на функция, неопределен интеграл, определен интеграл и неговите приложения.

Всяка глава съдържа съответния теоретичен материал, примери, голям брой решени задачи и задачи за самостоятелна подготовка. Всички задачи имат отговори, което ще улесни студентите при самостоятелната им работа.

Учебникът ще бъде особено полезен за студенти задочно и дистанционно обучение.

Април 2015 г. Авторът

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава 1

Комплексни числа

Множеството на естествените числа

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

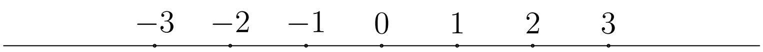
множеството на целите числа

$$\mathcal{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\},$$

множеството на рационалните числа

$$\mathcal{Q} = \{x = \frac{p}{q}, \quad q \neq 0, \quad p, q \in \mathcal{Z}\},$$

и множеството на реалните числа $\mathcal{R}$ са добре познати от училищния курс по математика. Всяко едно от тях съдържа предходното, т.е. $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$. Освен това между множеството $\mathcal{R}$ и реалната права има взаимно-еднозначно съответствие, като на всяко реално число съответства точка от правата и обратно.



В множеството на реалните числа има уравнения, които нямат решение. Такова е например уравнението $x^2 + 1 = 0$. Тогава е естествено да си поставим въпроса: Има ли множество, което да е разширение на множеството на реалните числа и в него уравнението $x^2 + 1 = 0$ и други като него да имат решение? Отговорът е положителен. Такова множество е множеството на комплексните числа, с което ще се запознаем в тази глава.

Комплексните числа са наредени двойки $z = (x, y)$ от реални числа. Числата от вида $z = (x, 0)$ се отъждествяват с реалните числа, т.е. $x = (x, 0)$, а числата от вида $z = (0, y)$ се наричат **чисто имагинерни.**

Комплексното число $i = (0, 1)$ се нарича **имагинерна единица**. За нея е изпълнено

$$i^2 = -1$$

Комплексните числа могат да се представят в **алгебричен** и **тригонометричен вид**.

В **алгебричен вид** се записват по следния начин

$$z = x + y.i$$

Числата x и y се наричат съответно **реална част** и **имагинерна част** на комплексното число. Означават се с $Re\ z$ и $Im\ z$.

> **Обърнете внимание** на това, че имагинерната част на комплексното число $z = x + iy$ е реалното число y, записано до имагинерната единица, а не целият израз yi.

Например, числото $z = 3 - 5i$ има реална част 3 и имагинерна част -5.

Числото $\overline{z} = x - yi$ се нарича **комплексно спрегнато** на $z = x + yi$.

Операциите с комплексни числа, записани в алгебричен вид, се задават с формулите:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \tag{1.1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i \tag{1.2}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \tag{1.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i \tag{1.4}$$

$$(x_2^2 + y_2^2 \neq 0)$$

Тези формули се запомнят лесно: при умножението на две комплексни числа, записани в алгебричен вид, извършваме умножение на изразите в скобите и заместваме i^2 с -1; при деление на две комплексни числа, записани в алгебричен вид, умножаваме числителя и знаменателя с комплексно спрегнатото на знаменателя и извършваме умножението по описания по-горе начин.

Пример 1.1: Дадени са комплексните числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 1 + i$. Пресметнете $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение:

$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + i) = (2 + 1) + (3 + 1)i = 3 + 4i$

$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 + i) = (2 - 1) + (3 - 1)i = 1 + 2i$

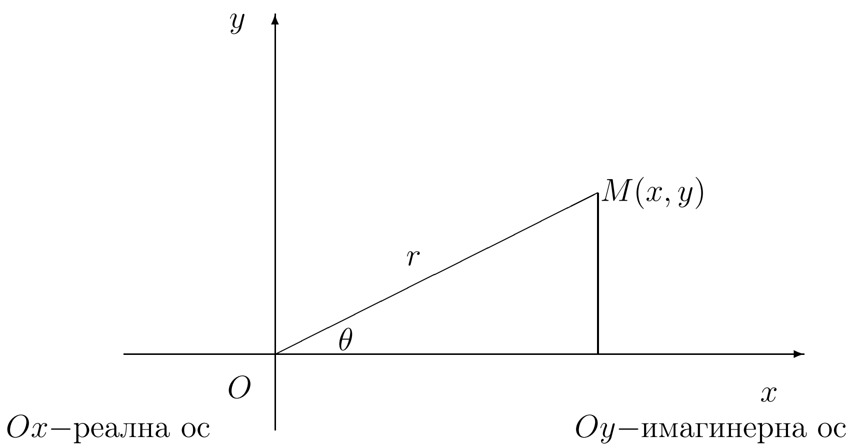
$z_1 z_2 = (2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i + 3(-1) = -1 + 5i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 + i} = \frac{(2 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - 2i + 3i + 3}{1 + 1} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} i$$

Решете самостоятелно пример 1.2:

Пример 1.2: Дадени са комплексните числа $z_1 = 3 - 4i$ и $z_2 = 1 + 2i$. Пресметнете $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Отг. $4 - 2i$, $2 - 6i$, $11 + 2i$, $-1 - 2i$.



Чертеж 1

Ако в равнината е въведена правоъгълна координатна система, то между множеството на комплексните числа и точките в равнината съществува взаимно-еднозначно съответствие, като на всяко комплексно число $z = x + yi$ се съпоставя точката (x, y) с абсциса x и ордината y. Поради това съответствие равнината се нарича още **комплексна или Гаусова равнина**.

Векторът с начало началото на координатната система и край дадена точка от равнината се нарича **радиус-вектор** на тази точка. Да означим с r дължината на радиус-вектора на точката (x, y) и с θ ъгъла, който сключва радиус-векторът на тази точка с положителната посока на абсцисната ос.

Числото r се нарича **модул** на комплексното число z и се бележи с $r = |z|$. Следователно модулът на комплексното число е равен на разстоянието от началото на координатната система до точката (x, y), изобразяваща числото. Той е неотрицателно реално число.

Ъгълът θ се нарича **аргумент** на комплексното число и се бележи с $arg\ z$. Стойностите му могат да бъдат както положителни, така и отрицателни. За положителна посока е приета посоката, обратна на часовниковата стрелка. Всички аргументи на комплексното число се различават с целочислени кратни на 2π. Ако $0 \leq arg\ z \leq 2\pi$, той се нарича **главна стойност** на аргумента и се бележи с $Arg\ z$.

Зависимостите между x, y и r, θ са следните (виж черт. 1):

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \tag{1.5}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \quad x \neq 0 \tag{1.6}$$

Следователно

$$z \ = \ x + yi \ = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.7}$$

В този случай казваме, че комплексното число $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ е записано в **тригонометричен вид**.

Обърнете внимание на това, че при тригонометричния вид на комплексното число *ъгълът* при функциите синус и косинус *е един и същ*

Тригонометричният вид на комплексните числа е по-удобен за извършване на операциите умножение, деление, степенуване и коренуване.

Нека $z = r(cos\theta + i\sin\theta)$, $z_1 = r_1(cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ и $z_2 = r_2(cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ са комплексни числа.
Тогава

$$z_1z_2 = r_1r_2[cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.8}$$

$$z^n = [r(cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(cos\, n\theta + i\sin\, n\theta), \tag{1.9}$$

където n е естествено число. Формула (1.12) се нарича **формула на Моавър**.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.10}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}) \tag{1.11}$$

$$k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

В последната формула за коренуване на комплексни числа под $\sqrt[n]{r}$ се разбира аритметичният корен от неотрицателното число r. От нея също се вижда, че намирането на $n-$ти корен от комплексно число е възможно винаги. Съществуват n на брой различни стойности (получаваме ги, давайки на k стойности $0, 1, 2, ..., n-1$). Съответните им точки са разположени в комплексната равнина върху една централна окръжност с радиус $\sqrt[n]{r}$ и я делят на n равни части, т.е. лежат във върховете на правилен $n-$ъгълник.

Запомнете:
1. При умножение на комплексни числа, записани в тригонометричен вид, модулите се умножават, а аргументите се събират.
2. При деление на комплексни числа, записани в тригонометричен вид, модулите се делят, а аргументите се изваждат.

Ще докажем равенства (1.8) и (1.11). Равенство (1.9) се получава след прилагане неколкократно на (1.8), а (1.10) се доказва аналогично на (1.8).

$z_1z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$. С това формула (1.8) е доказана.

Нека сега

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Повдигаме двете страни на последното равенство на n-та степен, прилагаме формулата на Моавър и получаваме

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$$

Но две комплексни числа, зададени в тригонометричен вид, са равни, ако имат равни модули, а аргументите им се различават с целочислено кратно на 2π. Следователно

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

Различните стойности на $\sqrt[n]{z}$ се получават, като даваме на k стойности от 0 до $n-1$. Ако продължим да даваме на k стойности $n, n+1, \dots$, то получените стойности ще започнат да се повтарят. С това формула (1.11) е доказана.

Пример 1.3: Дадени са комплексните числа $z_1 = 4(cos\ \frac{\pi}{3} + i\sin\ \frac{\pi}{3})$ и $z_2 = 2(cos\ \frac{\pi}{4} + i\sin\ \frac{\pi}{4})$. Пресметнете z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, z_2^3, $\sqrt[3]{z_1}$.

Решение:

$$z_1z_2 = 4(cos\ \frac{\pi}{3} + i\sin\ \frac{\pi}{3})2(cos\ \frac{\pi}{4} + i\sin\ \frac{\pi}{4}) = 8(cos\ \frac{7\pi}{12} + i\sin\ \frac{7\pi}{12})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4(cos\ \frac{\pi}{3} + i\sin\ \frac{\pi}{3})}{2(cos\ \frac{\pi}{4} + i\sin\ \frac{\pi}{4})} = 2(cos\ \frac{\pi}{12} + i\sin\ \frac{\pi}{12})$$

$$z_2^3 = [2(cos\ \frac{\pi}{4} + i\sin\ \frac{\pi}{4})]^3 = 8.(cos\ \frac{3\pi}{4} + i\sin\ \frac{3\pi}{4})$$

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{4(cos\ \frac{\pi}{3} + i\sin\ \frac{\pi}{3})} = \sqrt[3]{4}(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\ \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}) \qquad k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$ получаваме първата стойност на корена - $w_0 = \sqrt[3]{4}(cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$.

При $k = 1$ – втората стойност на корена - $w_1 = \sqrt[3]{4}.(cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9})$.

При $k = 2$ – третата стойност на корена - $w_2 = \sqrt[3]{4}(cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9})$.

Числата w_0, w_1 и w_2 лежат на централна окръжност с радиус $\sqrt[3]{4}$ и са върхове на равностранен триъгълник.

Както знаем от училищния курс по математика, в множеството на реалните числа има наредба. Това означава, че ако са дадени две реални числа, то или двете са равни или едното е по-голямо от другото. **В множеството на комплексните числа няма наредба** т.е. при комплексните числа не можем да казваме, че едно комплексно число е по-голямо или по-малко от друго.

ЗАДАЧИ

1.1 Извършете означените действия и резултата запишете в алгебричен вид.

а) $(2+3i)(4-5i)$

б) $(1+3i)(2+i)(1-i)+4i$

в) $(1+i)(2-i)^2+3i$

г) $\dfrac{3+i}{1+i}$

д) $\dfrac{1-i}{1+i}+2i$

е) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^5+2i$

Решение:

а) Разкриваме скобите и получаваме

$$(2+3i)(4-5i) = 8-10i+12i-15i^2 = 23+2i.$$

б) Аналогично

$$(1+3i)(2+i)(1-i)+4i = (-1+7i)(1-i)+4i = 6+8i+4i = 6+12i.$$

в) При този пример използваме формулата $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$(1+i)(2-i)^2+3i = (1+i)(4-4i-1)+3i = (1+i)(3-4i)+3i = 7+2i.$$

г) Умножаваме числителя и знаменателя с комплексно спрегнатото на знаменателя (формула 1.4) и получаваме

$$\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

д)

$$\frac{1-i}{1+i}+2i = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+2i = \frac{-2i}{2}+2i = -i+2i = i$$

е) От д) знаем, че $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$. Следователно

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5+2i = -i^5+2i = -i+2i = i.$$

1.2 Намерете реалните числа x и y, за които е изпълнено

$$(1-i).x+(-2+5i).y = -1+7i$$

Решение: Извършваме означените действия и получаваме

$$(x-2y)+(-x+5y)i = -1+7i$$

Като приравним съответно реалните и имагинерните части на числата, стоящи от двете страни на равенството, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rcr} x-2y & = & -1 \\ -x+5y & = & 7 \end{array}\right.$$

Решаваме тази система от две линейни уравнения с две неизвестни и получаваме $x=3$ и $y=2$.

1.3 Представете в тригонометричен вид числата

$$1,\ 3,\ -2,\ -5,\ i,\ 5i,\ -i,\ -3i.$$

Решение: Положителните реални числа имат аргумент 0, отрицателните реални числа имат аргумент π. Чисто имагинерните числа с положителна имагинерна част имат аргумент $\frac{\pi}{2}$, а чисто имагинерните числа с отрицателна имагинерна част имат аргумент $\frac{3\pi}{2}$. Следователно:

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0) \qquad 3 = 3(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) \qquad -5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) \qquad 5i = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

$$-i = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) \qquad -3i = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$$

При решаването на следващите задачи ще е полезна следната таблица:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.4 Представете в тригонометричен вид числата

а) $1+i$ б) $-1+i$ в) $1+i\sqrt{3}$

г) $\sqrt{3}+i$ д) $-1+i\sqrt{3}$ е) $-\sqrt{3}-i$

ж) $1-i$ з) $\sqrt{3}-i$ и) $-2-2i$

Решение:

а) За да напишем тригонометричния вид на комплексното число $z = 1+i$ трябва да пресметнем неговия модул и аргумент. Числото $z = 1+i$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

От условието $tg\,\theta = \frac{y}{x} = 1$ не можем да определим еднозначно аргумента θ, но тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

б) Числото $z = -1+i$ има реална част $x = -1$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$tg\,\theta = -1$ и тъй като числото лежи във втори квадрант, следва че $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad -1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

в) Числото $z = 1 + i\sqrt{3}$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = \sqrt{3}$. Следователно

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$tg\,\theta = \sqrt{3}$ и тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

$$\Longrightarrow \qquad 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

г) Числото $z = \sqrt{3} + i$ има реална част $x = \sqrt{3}$ и имагинерна част $y = 1$. Следователно

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$tg\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в първи квадрант, следва че $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \qquad \sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

д) Числото $z = -1 + i\sqrt{3}$ има реална част $x = -1$ и имагинерна част $y = \sqrt{3}$. Следователно

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$tg\,\theta = -\sqrt{3}$ и тъй като числото лежи във втори квадрант, следва че $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

$$\Longrightarrow \qquad -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

е) Числото $z = -\sqrt{3} - i$ има реална част $x = -\sqrt{3}$ и имагинерна част $y = -1$. Следователно

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$tg\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в трети квадрант, следва че $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \qquad -\sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$

ж) Числото $z = 1 - i$ има реална част $x = 1$ и имагинерна част $y = -1$. Следователно

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$tg\,\theta = -1$ и тъй като числото лежи в четвърти квадрант, следва че $\theta = \dfrac{7\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad 1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$

з) Числото $z = \sqrt{3} - i$ има реална част $x = \sqrt{3}$ и имагинерна част $y = -1$. Следователно

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$tg\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и тъй като числото лежи в четвърти квадрант, следва че $\theta = \dfrac{11\pi}{6}$

$$\Longrightarrow \qquad -\sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})$$

и) Числото $z = -2 - 2i$ има реална част $x = -2$ и имагинерна част $y = -2$. Следователно

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$tg\,\theta = 1$ и тъй като числото лежи в трети квадрант, следва че $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

$$\Longrightarrow \qquad -2 - 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$$

Задачи за самостоятелна работа:

1.5 Извършете означените действия и резултата запишете в алгебричен вид.

а) $(3+4i)(4-i)$ отг. $16 + 13i$

б) $(2+3i)(3-i)(1+i) - 2i$ отг. $2 + 14i$

в) $(1-2i)(2+i)^2 + 5i$ отг. $11 + 3i$

г) $\dfrac{2-i}{1+2i}$ отг. $-i$

д) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$ отг. $\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

е) $\dfrac{1}{1+4i} + \dfrac{1}{4-i}$ отг. $\dfrac{5}{17} - \dfrac{3}{17}i$

1.6 Представете в тригонометричен вид числата и ги изобразете като точки в комплексната равнина.

а) -8 отг. $8(\cos\pi + i\sin\pi)$

б) $-10i$ отг. $10(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

в) $-2+2\sqrt{3}i$ отг. $4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

г) $-\sqrt{3}i-1$ отг. $2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

Глава 2

Матрици

Матрица се нарича множество от $m.n$ на брой числа, подредени в правоъгълна таблица от m реда и n стълба.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числата a_{ij} се наричат *елементи* на матрицата . Две матрици се наричат **еднотипни**, ако имат съответно равен брой редове и стълбове. **Две матрици са равни**, ако са еднотипни и съответните им елементи са равни.

При $m = n$ матрицата A се нарича **квадратна матрица** от n-ти ред. Елементите $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуват **главния диагонал** на матрицата. Матрица, която има само един ред се нарича **вектор-ред**, а имаща само един стълб **вектор-стълб**. Под **диагонална матрица** се разбира квадратна матрица, чиито елементи извън главния диагонал са нули. Диагонална матрица, на която елементите по главния диагонал са равни се нарича **скаларна матрица**. Скаларна матрица с диагонални елементи равни на единица се нарича **единична матрица** и се бележи с E. Матрица, на която всички елементи са равни на нула ще наричаме **нулева матрица**.

Сума на две еднотипни матрици

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

се нарича матрицата

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Произведение на матрицата А с числото λ се нарича матрицата, на която всички елементи са умножени с λ , т.е.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Нека A е $m \times n$ матрица, а B е $n \times p$ матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Произведение на матрицата A **с матрицата** B се нарича матрицата C с m реда и p стълба

$$C = A.B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

с елементи $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Пример 2.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.1 + (-2).4 + 2.0 & 1.(-2) + (-2).(-1) + 2.3 \\ 0.1 + 1.4 + 3.0 & 0.(-2) + 1.(-1) + 3.3 \\ (-1).1 + 2.4 + 2.0 & (-1).(-2) + 2.(-1) + 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Произведението на две матрици $A.B$ е дефинирано само тогава, когато броят на стълбовете на първата матрица A е равен на броя на редовете на втората матрица B. Елементите на произведението на две матрици се получават като се умножават **редовете на първата матрица** със **стълбовете на втората**.

От следващия пример се вижда, че **комутативният закон не е в сила** при умножението на две матрици, т.е. в общия случай $AB \neq BA$.

Пример 2.2

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 22 & 5 \end{pmatrix}$$

Лесно може да се провери, че скаларните матрици комутират с всяка матрица от същия ред. Единичната матрица е наречена така, защото $E.X = X.E = X$ за всяка матрица X от n-ти ред, т.е. матрицата E играе ролята на числото едно при умножение на матрици.

Нека A е квадратна матрица от ред n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрицата

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

редовете на която са стълбовете на A, се нарича **транспонирана** на A.

В сила са следните правила за транспониране:

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\lambda.A)^T = \lambda.A^T, \quad (A.B)^T = B^T.A^T$$

За действията с матрици са в сила следните свойства, при условие че означените операции са изпълними. За квадратните матрици от един и същи ред те винаги са в сила.

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6. $(AB)C = A(BC)$
7. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
8. $A(B + C) = AB + AC$
9. $(A + B)C = AC + BC$

ЗАДАЧИ

2.1. Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, да се преметне $4A - 3B$.

Решение:

$$4A - 3B = 4\begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 24 & -4 \\ 0 & -8 & -20 \\ -12 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ -6 & 6 & 9 \\ 12 & -3 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 24 & -16 \\ 6 & -14 & -29 \\ -24 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

2.2. Умножете матриците

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2 + 2.(-1) + 2.1 & 1.3 + 2.4 + 2.2 & 1.1 + 2.0 + 2.(-1) \\ 0.2 + 1.(-1) + 2.1 & 0.3 + 1.4 + 2.2 & 0.1 + 1.0 + 2.(-1) \\ 3.2 + 1.(-1) + 1.1 & 3.3 + 1.4 + 1.2 & 3.1 + 1.0 + 1.(-1) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 6 & 15 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 18 & 30 \\ -5 & 8 & 13 \\ 12 & 29 & 40 \end{pmatrix}$$

2.3. Ако $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, пресметнете $A.A^T$.

Решение: Имаме

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$A.A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 27 \\ 27 & 27 \end{pmatrix}$$

2.4. Ако $A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, да се намери $(A+B)^2 - 2B.A$

Решение: Имаме

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогава

$$(A+B)^2 - 2BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & 3 & -2 \\ 3 & -14 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & -12 & 2 \\ -9 & -13 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 28 & 0 \\ 15 & 29 & -8 \\ -7 & -16 & 5 \end{pmatrix}$$

Задачи за самостоятелна работа

2.5 Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \\ -6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, да се намерят:

а) $6A + B$ б) $3(3A + B)$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 7 & 36 & -2 \\ 2 & -10 & -27 \\ -24 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 12 & 54 & 3 \\ 6 & -12 & -45 \\ -45 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

2.6 Умножете матриците

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Отг. а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ в) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.7 Ако $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, пресметнете $A^T.A$

Отг. $\begin{pmatrix} 20 & 14 & 6 & 6 \\ 14 & 10 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Глава 3

Детерминанти

I. Основни дефиниции

Нека A е квадратна матрица от втори ред $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Детерминанта от втори ред, съответстваща на матрицата A, се нарича числото

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Пример 3.1 $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1).2 - 4.(-5) = -2 + 20 = 20 - 2 = 18$

Аналогично, ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ е квадратна матрица от трети ред, то съответстващата и **детерминанта от трети ред** е числото

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 3.2 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5.\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 3(14 - 2) - 4(2 + 4) - 5(-1 - 14) = 36 - 24 + 75 = 111 - 24 = 87$

II. Пресмятане на детерминанти от n-ти ред

Нека Δ е детерминанта от ред n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

а Δ_{ij} е детерминантата от ред $n-1$, която се получава от Δ чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб. Детерминантата Δ_{ij} се нарича **поддетерминанта** на Δ, съответстваща на елемента a_{ij}

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебрично допълнение (адюнгирано количество) на елемента a_{ij} наричаме числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Нека i е номерът на произволен ред на детерминантата Δ.

Дефиниция: $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

Горната дефиниция ни казва, че ако умножим елементите на даден ред със съответните им адюнгирани количества и получените произведения съберем, то резултатът е стойността на детерминантата. (*Кой ред е използван при пресмятането на детерминантите от втори и трети ред ?*)

III. Свойства на детерминантите

1. Ако разместим два реда на детерминантата помежду им, детерминантата променя само своя знак.

2. Детерминанта, която съдържа два еднакви реда е равна на нула.

Доказателство: Да означим детерминантата с Δ, а детерминантата, получена след размяната на двата еднакви реда, с Δ_1. Тъй като двата реда са еднакви, то $\Delta_1 = \Delta$, а от свойство 1 следва, че $\Delta_1 = -\Delta$. Следователно $\Delta = -\Delta$, $\Rightarrow 2\Delta = 0$, $\Rightarrow \Delta = 0$.

3. Ако умножим елементите на даден ред с адюнгираните количества на съответните елементи на друг ред и ги съберем, ще получим нула, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{lk} = a_{i1}A_{l1} + a_{i2}A_{l2} + \ldots + a_{ij}A_{lj} + \ldots + a_{in}A_{ln} = 0, \text{при } l \neq i.$$

4. Ако елементите от един ред на детерминантата имат общ множител, той може да се изнесе пред детерминантата

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda.\Delta$$

Доказателство: $\Delta_1 = \sum_{k=1}^{n}(\lambda.a_{ik})A_{ik} = \lambda.\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \lambda.\Delta$.

5. Детерминанта, която има нулев ред, е равна на нула.

Доказателство: Следва от свойство 4 при $\lambda = 0$.

6. Детерминанта, съдържаща два пропорционални реда е равна на нула.

Доказателство: Следва от свойство 4 и свойство 2.

7. Ако елементите на i-тия ред на детерминанта са суми от по две събираеми $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \quad j = 1, 2, ..., n,$ то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2$$

Доказателство: $\Delta = \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} + c_{ik}) A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} c_{ik} A_{ik} = \Delta_1 + \Delta_2.$

Забележка: Очевидно е, че свойство 7 е в сила за краен брой събираеми.

Казваме, че i-тия ред на една детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

е **линейна комбинация** на останалите редове, когато съществуват числа

$$c_1, \ c_2, ..., \ c_{i-1}, \ c_{i+1}, ..., \ c_n,$$

такива че за $j = 1, 2, ..., n$ е изпълнено

$$a_{ij} = c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + ... + c_{i-1} a_{i-1,j} + c_{i+1} a_{i+1,j} + ... + c_n a_{nj}$$

8. Ако един от редовете на детерминантата е линейна комбинация на останалите редове, то детерминантата е равна на нула.

Доказателство: Прилагаме свойство 7 (забележката) и свойство 6.

9. Детерминантата не се променя, ако към елементите на един ред се прибавят съответните елементи на друг ред, умножени с едно и също число.

Доказателство: Нека елементите на i-тия ред са умножени с числото λ и са прибавени към j-тия ред. Пресмятаме новата детерминанта Δ_1, като развиваме точно по този новополучен ред и прилагаме свойство 7. Получаваме: $\Delta_1 =$

$\sum_{k=1}^{n}(a_{jk}+\lambda.a_{ik})A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}A_{jk}+\sum_{k=1}^{n}(\lambda.a_{ik})A_{jk}=\Delta+0=\Delta$ (втората детерминанта е равна на нула, тъй като има да пропорционални реда).

10. $\det\ A=\det\ A^T$

Следствие: Свойствата 1–9 са в сила и при съответната формулировка за стълбовете на детерминантите.

Пример 3.3

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

(развиваме по елементите на първия ред)

$$=(-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.4.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7-4.1+2.3=9.$$

Детерминанта, за която всички елементи от едната страна на главния диагонал са нули, се нарича **триъгълна**. Стойността на триъгълна детерминанта е равна на произведението на числата по главния диагонал.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}....a_{nn}$$

Пример 3.4

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$ (първия ред, умножен по (-1), прибавяме към всеки от останалите редове)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1.2.(-6).(-5)=60.$$

Пример 3.5 (**Детерминанта на Вандермонд**)

$$W_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

В сила е равенството

$$\begin{aligned} W_n = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) = \; & (x_2 - x_1) \\ & .(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ & .(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) \\ & \dots \\ & .(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\dots(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Следователно $W_n \neq 0$ тогава и само тогава, когато числата x_i $(i = 1, \dots, n)$ са различни.

ЗАДАЧИ

3.6 Пресметнете детерминантите а) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

Решение:

а) $\Delta = 5.4 - (-1).3 = 20 + 3 = 23$

б) $\Delta = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) - (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = (1-2) - (9-5) = -1 - 4 = -5$

3.7 Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\Delta = 1.(45 - 48) - 2.(36 - 42) + 3.(32 - 35) =$$
$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

> Пресмятането на детерминанти от по-висок ред става чрез използване на основните свойства и свеждане до детерминанти от по-нисък ред. Това може да става по различни начини. В този смисъл, следващите решения не са единствено възможните.

3.8 Пресметнете детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix} = \quad \begin{matrix} .(-1) \\ \swarrow (+) \end{matrix}$$

(умножаваме първия ред с (-1) и го прибавяме към всеки от останалите редове)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 14 \end{vmatrix} = \quad \begin{matrix} .(-2)\ .(-3) \\ \swarrow (+) \end{matrix}$$

(умножаваме втория ред с (-2) и с (-3) и го прибавяме съответно към третия и четвъртия ред)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \quad \begin{matrix} .(-2) \\ \swarrow (+) \end{matrix}$$

(умножаваме третия ред с (-2) и го прибавяме към четвъртия)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3.9 Решете уравнението $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

(Прибавяме първия ред на детерминантата към втория и след това развиваме по елементите на първия стълб)

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

(Развиваме по елементите на последния стълб)

$$= x.\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^2.\begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2(x^2 - x - 2) = x^4 - x^3 - 2x^2$$

Следователно уравнението, което трябва да решим е $x^2(x^2 - x - 2) = 0$ и корените му са $\;x_{1,2} = 0,\; x_3 = 2,\; x_4 = -1$.

Задачи за самостоятелна работа

3.10 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

Отг. а) 12; б)1; в) 60

3.11 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} a+bi & -b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 - x^2 & x^2+1 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} \operatorname{cotg}^2 x & \operatorname{tg}^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{vmatrix}$

Отг. а) $(a+b)^2$; б) 0; в) $x-1$; г) $\cos 2x$

3.12 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 16 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 4 & 11 & 8 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Отг. а) 12; б) 360 в) 2

3.13 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & a & -x \\ -a & 1 & x \\ x & -x & 1 \end{vmatrix}$

Отг. а) $2a^2(x+a)$; б) $1 + a^2 + 2x^2$

3.14 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Отг. а) -1; б) 12; в) -105 г)-10

3.15 Пресметнете детерминантите

а) $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Отг. а) $x^5 - 6x^3 + 8x$; б) 56

3.16 Да се решат уравненията:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$ б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -15 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$

Отг. а) $x_1 = -1, \quad x_{2,3} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

б) $x_{1,2} = 0, \quad x_3 = -5, \quad x_4 = 3$

Глава 4

Системи линейни уравнения

Система линейни уравнения (линейна система) от m уравнения с n неизвестни наричаме система от вида

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & a_{m3}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Тук $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са **неизвестни,** числата $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ – **коефициенти пред неизвестните,** а числата $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – **свободни членове.** Ако поне един от свободните членове е различен от нула, системата се нарича **нехомогенна.** Когато всички свободни членове са нули, системата се нарича **хомогенна.**

Решение на системата (4.1) наричаме всяка съвкупност от числа

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n,$$

които, заместени в уравненията на системата, ги превръщат във верни числови равенства. Да решим една линейна система означава да намерим всичките и решения или да установим, че тя няма решение. Система, която има решение се нарича **съвместима.** Ако системата няма решение, тя се нарича **несъвместима.**

Матрицата

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

от коефициентите пред неизвестните наричаме **основна матрица** на системата (4.1) или само **матрица на системата,** а матрицата

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

се нарича **разширена матрица на системата.**

Ако означим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

системата (4.1) можем да запишем като матрично уравнение

$$A\,X = B \tag{4.2}$$

Нека (4.3) е линейна система от n уравнения с n неизвестни

$$\left| \begin{array}{ccccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & a_{13}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & a_{23}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ a_{31}\,x_1 & + & a_{32}\,x_2 & + & a_{33}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}\,x_n & = & b_3 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & a_{n3}\,x_3 & + & \cdots & + & a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Да означим с Δ и Δ_j следните детерминанти:

$$\Delta = det \;\; A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,j-1} & b_3 & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема 4.1 **(Формули на Крамер)** *Ако $\Delta = det\ A \neq 0$, то системата линейни уравнения (4.3) има единствено решение, което се задава със следните формули:*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad\qquad j = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{4.4}$$

1. Тъй като системата (4.3) има еднакъв брой уравнения и неизвестни, то матрицата на системата е квадратна и можем да разглеждаме детерминантата Δ, съответстваща на тази матрица.

2. Детерминантата Δ_j се получава от детерминантата Δ като се замени $j-$ят стълб на Δ със стълба на свободните членове.

3. Формулите на Крамер се прилагат само за линейни системи, които имат еднакъв брой уравнения и неизвестни.

Пример 4.1 Решете системата

$$\left| \begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & = & 19 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & = & -8 \end{array} \right.$$

Решение: Тъй като системата има две уравнения и две неизвестни, то можем да се опитаме да я решим чрез формулите на Крамер. Най-напред пресмятаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 - (-10) = 31 \neq 0.$$

Следователно, според Теорема 4.1, системата има единствено решение, което можем да намерим по формулите на Крамер (4.4).

Пресмятаме последователно детерминантите:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 19 & -5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = 133 - 40 = 93, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -24 - 38 = -62.$$

и получаваме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{93}{31} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{62}{31} = -2,$$

Пример 4.2 Решете системата

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Решение: Тъй като системата има три уравнения и три неизвестни, то можем да се опитаме да я решим чрез формулите на Крамер. Най-напред пресмятаме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Следователно, според Теорема 4.1, системата има единствено решение, което можем да намерим по формулите на Крамер (4.4).

Пресмятаме последователно детерминантите:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-3).\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

и получаваме

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{18}{9} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{9}{9} = 1.$$

Глава 5

Вектори

1. Вектор. Сума и разлика на вектори. Произведение на вектор с число.

Насочена отсечка (вектор) наричаме отсечка, ограничена от две точки, едната от които е избрана за начало, а другата за край. Ако началото е A , а краят е B, вектора означаваме с $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{a}$.

Дължината на отсечката AB наричаме **дължина (модул)** на вектора. Означаваме с $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\overrightarrow{a}|$.

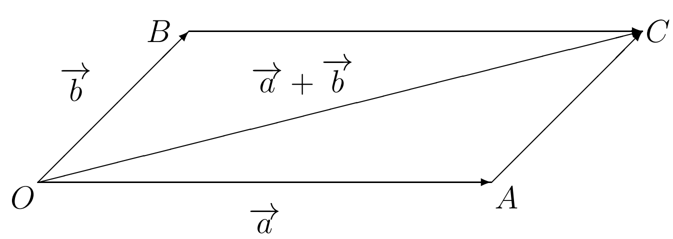
Вектор, на който началото и краят съвпадат, наричаме **нулев** вектор $\overrightarrow{o}$. Вектор с дължина 1 наричаме **единичен**.

Два вектора са **равни**, ако имат равни дължини и еднакви посоки. Ако два вектора са равни, ще ги считаме за един и същи вектор.

Вектори, които са успоредни на една права се наричат **колинеарни**, а вектори, които лежат в една равнина или са успоредни на една равнина се наричат **компланарни**.

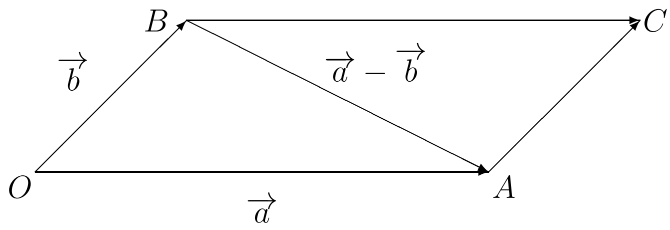
Сума на векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_n}$ наричаме вектора $\overrightarrow{b}$ с начало, съвпадащо с началото на първия вектор и край, съвпадащ с края на последния вектор, ако векторите са разположени така, че началото на всеки от тях да съвпада с края на предхождащия го. Означаваме с $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \dots + \overrightarrow{a_n}$.

Сумата на два неколинеарни вектора $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$, нанесени с общо начало, е векторът $\overrightarrow{OC}$ - **диагонал на успоредника**, построен върху дадените вектори.



Разлика на два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е трети вектор $\overrightarrow{c}$, за който $\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$.

Ако векторите имат общо начало, то векторът $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ съединява краищата им и е насочен от края на $\overrightarrow{b}$ към края на $\overrightarrow{a}$.



Произведение на вектор $\overrightarrow{a}$ с реално число m наричаме вектор $\overrightarrow{b}$, който:

1. При $m > 0$ има посока, съвпадаща с посоката на $\overrightarrow{a}$
2. При $m < 0$ има посока, противоположна на посоката на $\overrightarrow{a}$ и
3. $|\overrightarrow{b}| = |m|.|\overrightarrow{a}|$.

Ако $\overrightarrow{a}$ е ненулев вектор и $\overrightarrow{b}$ е произволен колинеарен с него вектор, то съществува единствено число m, такова че $\overrightarrow{b} = m.\overrightarrow{a}$. Очевидно е, че $m = \dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, ако векторите са еднопосочно колинеарни и $m = -\dfrac{|\overrightarrow{b}|}{|\overrightarrow{a}|}$, ако те са разнопосочно колинеарни.

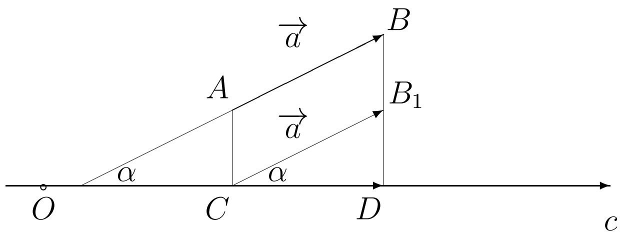
Векторът $\overrightarrow{a^0} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a} = \dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}$ е еднопосочен с вектора $\overrightarrow{a}$ и има дължина единица.

В множеството на векторите въведохме две операции - събиране на вектори и умножение на вектор с число. Лесно може да се провери, че така въведените операции притежават следните осем свойства:

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$ (*комутативен закон за събирането*)
2. $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ (*асоциативен закон за събирането*)
3. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{o} = \overrightarrow{a}$
4. $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{o}$
5. $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$
7. $(\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a})$
8. $1.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Всяко множество от обекти, в което са въведени такива две операции се нарича **векторно пространство**.

Права, на която е избрана посока, се нарича **ос**. Нека са дадени ос c и вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$.



Нека AC и BD са перпендикулярни на оста c и да означим с α ъгъла между вектора $\overrightarrow{a}$ и оста c. Векторът $\overrightarrow{CD}$ наричаме **геометрична проекция на вектора** $\overrightarrow{a}$ върху c.

Алгебрична проекция на вектора $\overrightarrow{a}$ върху оста c наричаме дължината на векторната проекция $\overrightarrow{CD}$, взета със знак плюс, ако посоката на геометричната проекция съвпада с положителната посока на оста и със знак минус в противния случай.

Алгебричната проекция ще наричаме за краткост само проекция и ще бележим с пр $_c\ \overrightarrow{a}$. От правоъгълния $\triangle\, CDB_1$ се вижда, че проекцията на вектора е равна на дължината на вектора умножена по косинуса на α, т.е.

$$\text{пр}_{\,c}\ \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\alpha \tag{5.1}$$

Чрез разглеждане на различните възможни случаи лесно може да се докаже, че са в сила следните свойства:

$$\text{пр}_{\,c}\,(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda\ \text{пр}_{\,c}\ \overrightarrow{a} \tag{5.2}$$

$$\text{пр}_{\,c}\,(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \text{пр}_{\,c}\ \overrightarrow{a} + \text{пр}_{\,c}\ \overrightarrow{b} \tag{5.3}$$

2. Линейна зависимост и независимост на вектори.

Нека $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ е множество от вектори в равнината или вектори в пространството.

Казваме, че векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ са **линейно зависими**, ако съществуват константи $c_1, c_2, ..., c_n$ (поне една различна от нула) такива, че да е изпълнено

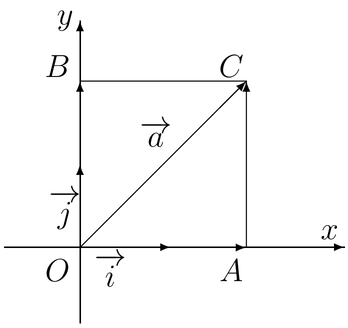
$$c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2} + \cdots + c_n\overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{o} \tag{5.4}$$

Ако равенството (5.4) е изпълнено само за $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$, то векторите $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ се наричат **линейно независими**.

Теорема 5.1 *Два вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са колинеарни. Три вектора са линейно зависими тогава и само тогава, когато са компланарни.*

Подмножество от максимален брой линейно независими вектори образуват **базис**. Броят на векторите в базиса определя размерността на съответното векторно пространство. В следващите редове ще се убедим, че в равнината има базис от 2 вектора и всеки друг вектор се изразява по единствен начин като линейна комбинация на векторите от базиса. Аналогично в пространството има базис от 3 вектора и всеки друг вектор се изразява по единствен начин като линейна комбинация на векторите от базиса.

Да разгледаме равнинния случай. Първо да припомним, че две взаимно-перпендикулярни оси с общо начало O и една и съща единица за дължина образуват декартова правоъгълна координатна система в равнината.



Нека $\vec{i}$, $\vec{j}$ са единични вектори, еднопосочни с координатните оси. Тези два вектора са линейно независими, в противен случай ще следва, че те са колинеарни. Да вземем трети вектор $\vec{a}$. Имаме две възможности - или $\vec{a}$ да лежи на някоя от осите или да бъде в общо положение (както е на чертежа). Ако $\vec{a}$ лежи на някоя от осите, то той и съответния вектор $\vec{i}$ или $\vec{j}$ са колинеарни, т.е. линейно зависими, а следователно и трите вектора $\vec{a}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ са линейно зависими. Ако $\vec{a}$ е в общо положение, то

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

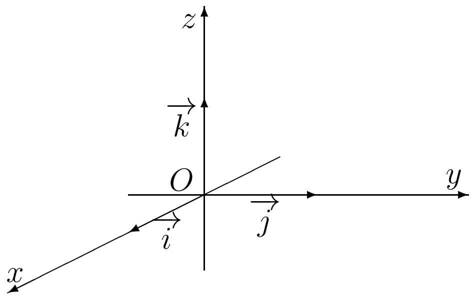
Но $\overrightarrow{OA} = a_1.\vec{i}$, а $\overrightarrow{OB} = a_2.\vec{j}$, където a_1 и a_2 са алгебричните проекции на $\vec{a}$ върху съответните координатни оси. Следователно:

$$\vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j}, \tag{5.5}$$

т.е. трите вектора $\vec{a}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ отново са линейно зависими. Следователно векторите $\vec{i}$ и $\vec{j}$ образуват базис. Нещо повече, от равенство (5.5) виждаме, че всеки вектор в равнината се представя като линейна комбинация на векторите от базиса. Сега ще покажем, че това представяне е единствено. Наистина, ако допуснем че $\vec{a} = b_1.\vec{i} + b_2.\vec{j}$ ще следва, че $\vec{o} = (a_1 - b_1).\vec{i} + (a_2 - b_2).\vec{j}$ и тъй като $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са линейно независими, то следва че $a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$.

Числата a_1, a_2 наричаме **координати** на вектора $\vec{a}$ и означаваме с $\vec{a}(a_1, a_2)$. Базисните вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ имат съответно координати $\vec{i}(1, 0)$, $\vec{j}(0, 1)$.

Три взаимно-перпендикулярни оси с общо начало O и една и съща единица за дължина образуват декартова правоъгълна координатна система в пространството.



Нека $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{k}$ са единични вектори, еднопосочни с координатните оси. Аналогично на предишните разсъждения можем да се убедим, че трите вектора образуват базис и всеки друг вектор в пространството се представя по единствен начин като тяхна линейна комбинация

$$\overrightarrow{a} = a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}.$$

Числата a_1, a_2, a_3 наричаме **координати** на вектора $\overrightarrow{a}$ и означаваме с

$$\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3).$$

Координатите на вектор са равни на съответните алгебрични проекции на вектора върху координатните оси. Първата координата a_1 се нарича **абсциса**, втората a_2 - **ордината**, а третата a_3 - **апликата**.

Базисните вектори $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ и $\overrightarrow{k}$ имат съответно координати $\overrightarrow{i}(1,0,0)$, $\overrightarrow{j}(0,1,0)$ и $\overrightarrow{k}(0,0,1)$. Тъй като трите вектора са единични и взаимно перпендикулярни, казваме че те образуват **ортонормиран базис**.

Ако са дадени векторите $\overrightarrow{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\overrightarrow{b}(b_1, b_2, b_3)$, то

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b}(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3) \tag{5.6}$$

$$k\overrightarrow{a}(ka_1, ka_2, ka_3). \tag{5.7}$$

От формули (5.6) и (5.7) следва, че координатите на вектор, който е линейна комбинация на дадени вектори, са същите линейни комбинации от съответните координати на дадените вектори.

Координатите на вектора $\overrightarrow{OM}$ наричаме координати на точката M.

Ако са дадени точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то векторът $\overrightarrow{M_1M_2}$ има координати

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{5.8}$$

Координатите на точката M, деляща отсечката M_1M_2 в отношение λ ($\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$) са:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{5.9}$$

Ако M е среда на отсечката M_1M_2 , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ z = \frac{z_1 + z_2}{2} \tag{5.10}$$

Пример 5.1: Дадени са точките $A(5, 3, 9)$, $B(-1, 3, -3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(3, 1, 6)$. Да се намерят координатите на $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ и точката M, за която $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$

Решение: За да намерим координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$, трябва от координатите на втората точка B да извадим координатите на първата A.
Следователно:

$$\overrightarrow{AB}(-6, 0, -12), \qquad \overrightarrow{CD}(1, 4, 1).$$

Координатите на $\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CD}$ са $\overrightarrow{c}(-15, -12, -27)$
За да определим координатите на точка M, използваме формули (5.9) при $\lambda = 2$.
Следователно:

$$x_M = \frac{x_A + 2x_B}{3} = 1, \quad y_M = \frac{y_A + 2y_B}{3} = 3, \quad z_M = \frac{z_A + 2z_B}{3} = 1$$

Пример 5.2: Векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ са линейно независими. Да се определи дали векторите $\overrightarrow{p} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{q} = -\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ са линейно зависими или линейно независими.

Решение: Записваме основното дефиниционно равенство (5.4) за векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$

$$c_1\overrightarrow{p} + c_2\overrightarrow{q} + c_3\overrightarrow{r} = \overrightarrow{o}$$

Следователно:

$$c_1(2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + c_2(-\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}) + c_3(2\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{o}$$

Преобразуваме и получаваме

$$(2c_1 - c_2 + 2c_3)\overrightarrow{a} + (-c_1 + 2c_2 + 2c_3)\overrightarrow{b} + (-c_1 - c_2 + c_3)\overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$$

Но векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ са линейно независими. Следователно последното равенство е възможно само ако коефициентите в скобите са нули.

$$\left| \begin{array}{rcrcrcl} 2c_1 & - & c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ -c_1 & + & 2c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ -c_1 & - & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ако тази хомогенна система от три уравнения с три неизвестни има ненулево решение, то векторите $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{r}$ ще са линейно зависими. Ако има само нулевото решение, то те ще са линейно независими.

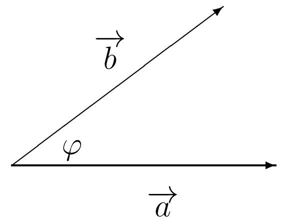
Тъй като детерминантата на системата

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0,$$

то според формулите на Крамер (Глава 4, Теорема 4.1) системата има само нулевото решение и следователно трите вектора са линейно независими.

3. Скаларно и векторно произведение на два вектора. Смесено произведение на три вектора.

Нека са дадени два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ и нека ъгълът между тях е φ. Да означим с a и b осите, определени съответно от двата вектора.



Дефиниция 5.1 ***Скаларно произведение*** *на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ наричаме числото*

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi = |\overrightarrow{a}|np_{\,a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|np_{\,b}\,\overrightarrow{a} \tag{5.11}$$

Свойства:

1. $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2 \geq 0, \qquad \overrightarrow{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$
2. $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}.\overrightarrow{a}$
3. $(\lambda\overrightarrow{a}).\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}.(\lambda\overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$
4. $\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}$

Свойства 1 и 2 са очевидни. Ще докажем верността на свойства 3 и 4.

Доказателство: 3. От (5.11) и (5.2) имаме

$$(\lambda\overrightarrow{a}).\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\text{пр}_b\,(\lambda\overrightarrow{a}) = |\overrightarrow{b}|\lambda\text{пр}_b\,\overrightarrow{a} = \lambda|\overrightarrow{b}|\text{пр}_b\,\overrightarrow{a} = \lambda(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$$

$$\overrightarrow{a}.(\lambda\overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|\text{пр}_a\,(\lambda\overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}|\lambda\text{пр}_a\,\overrightarrow{b} = \lambda|\overrightarrow{a}|\text{пр}_a\,\overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})$$

4. От (5.11) и (5.3) имаме

$$\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = |\overrightarrow{a}|\text{пр}_a(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = |\overrightarrow{a}|(\text{пр}_a\overrightarrow{b} + \text{пр}_a\overrightarrow{c}) =$$

$$= |\overrightarrow{a}|\text{пр}_a\overrightarrow{b} + |\overrightarrow{a}|\text{пр}_a\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}$$

■

Теорема 5.2 *Два ненулеви вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ са перпендикулярни тогава и само тогава, когато тяхното скаларно произведение е равно на нула.*

Доказателство: 1. Нека $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тогава $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

2. Нека $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$. Но $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$. Това означава, че $\cos\varphi = 0$. Следователно $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. ■

Използвайки дефиницията на скаларно произведение, свойство 2 и теорема 5.2 лесно можем да пресметнем скаларните произведения между ортонормираните базисни вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Получаваме:

$$\begin{array}{lll} \vec{i}.\vec{i} = 1, & \vec{j}.\vec{i} = 0, & \vec{k}.\vec{i} = 0, \\ \vec{i}.\vec{j} = 0, & \vec{j}.\vec{j} = 1, & \vec{k}.\vec{j} = 0, \\ \vec{i}.\vec{k} = 0, & \vec{j}.\vec{k} = 0, & \vec{k}.\vec{k} = 1. \end{array}$$

Следователно, ако векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са зададени с координатите си, то

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}).(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{5.12}$$

Приложения на скаларното произведение:

1. Дължина на вектор: Нека $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \tag{5.13}$$

2. Разстояние между две точки: Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две точки в пространството. Тогава

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{5.14}$$

3. Ъгъл между два вектора:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}} \tag{5.15}$$

4. Директорни косинуси на вектор:

Нека вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ сключва с осите Ox, Oy и Oz съответно ъгли α, β и γ. Тогава

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{i}}{|\vec{a}||\vec{i}|} = \frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a}.\vec{j}}{|\vec{a}||\vec{j}|} = \frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}.\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|} = \frac{a_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}}$$

Следователно

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ако $\overrightarrow{a}$ е единичен вектор ($\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2} = 1$), получаваме че $a_1 = \cos\alpha$, $a_2 = \cos\beta$ и $a_3 = \cos\gamma$, т.е. директорните косинуси са координатите на единичния вектор по направление на вектора $\overrightarrow{a}$.

5. Пресмятане работата на сила: Нека на материална точка е приложена сила $\overrightarrow{F}$, която премества точката от точка O до точка B, т.е. на разстояние $|\overrightarrow{s}| = |\overrightarrow{OB}|$. Тогава работата A, която силата извършва е равна на скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{s}$, т.е. $A = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{s}$.

Пример 5.3: Дадени са векторите $\overrightarrow{a}(2,-1,2)$ и $\overrightarrow{b}(6,-3,2)$. Пресметнете $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{b}|$, $\sphericalangle(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ и директорните косинуси на $\overrightarrow{a}$.

Решение: 1. Скаларното произведение пресмятаме по формула (5.12) и получаваме

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 2.6 + (-1)(-3) + 2.2 = 12 + 3 + 4 = 19.$$

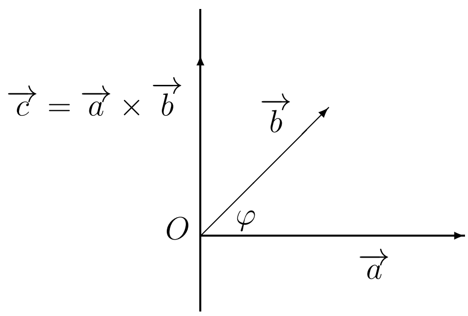
2. Дължините на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ пресмятаме по формула (5.13) и получаваме

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad |\overrightarrow{b}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7.$$

3. Ъгълът между двата вектора пресмятаме по формула (5.15) и получаваме

$$\cos\varphi = \frac{19}{21}.$$

4. Пресмятаме координатите на $\overrightarrow{a}^0\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Следователно $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{-1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$, което показва, че векторът $\overrightarrow{a}$ сключва равни остри ъгли с осите Ox и Oz и тъп ъгъл с оста Oy.



Дефиниция 5.2 ***Векторно произведение*** *на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ наричаме трети вектор $\overrightarrow{c}$, определен от условията:*

1) *Векторът $\overrightarrow{c}$ е перпендикулярен на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.*

2) *Посоката на вектора $\overrightarrow{c}$ е такава, че векторите $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ да образуват дясно-ориентирана тройка.*

3) $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$

Векторното произведение на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ означаваме с $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

1. Първото условие в дефиницията на векторното произведение означава, че векторът $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ е перпендикулярен на равнината, определена от двата вектора.

2. Условието трите вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ (в дадения ред) да образуват дясно-ориентирана тройка означава следното: при наблюдение от края на третия вектор $\overrightarrow{c}$ завъртането на първия вектор $\overrightarrow{a}$ на ъгъл по-малък от 180° до съвпадането му с втория вектор $\overrightarrow{b}$ се вижда в посока, обратна на часовниковата стрелка. Тази посока в математиката е приета за положителна.

3. Третото условие показва каква е дължината на новия вектор. Тя е равна на лицето на успоредника, определен от двата вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Свойства:

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$

2. $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$

3. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$

Свойство 3 ще приемем без доказателство. Ще докажем верността на свойства 1 и 2.

Доказателство: 1. Нека $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, а $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$. От дефиницията на векторно произведение следва, че двата вектора са перпендикулярни на равнината, определена от векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, имат равни дължини, но противоположни посоки.

2. Ще докажем първо равенството $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$, като разгледаме три случая: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

Ако $\lambda = 0$, получаваме $\overrightarrow{o} = \overrightarrow{o}$.

Ако $\lambda > 0$, векторите $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}$ и $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ са еднопосочно колинеарни с вектора $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ и имат равни дължини $|\lambda||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$. Следователно са равни.

Ако $\lambda < 0$, векторите $(\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}$ и $\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ са разнопосочно колинеарни с вектора $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ и отново имат равни дължини $|\lambda||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi$, т.е. пак са равни.

Равенството $\overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$ следва от вече доказаното и свойство 1. Наистина:

$$\overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b}) = -(\lambda \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a} = -\lambda(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}) = -(-\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})) = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$$

Теорема 5.3 *Векторното произведение на два ненулеви вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е равно на $\overrightarrow{o}$ тогава и само тогава, когато те са колинеарни.*

Доказателство: 1. Нека векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни. Следователно $\measuredangle\varphi = 0$ или $\measuredangle\varphi = \pi$. Тогава $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = 0$. Следователно $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

2. Нека $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$. Тогава $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = 0$. Но $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$. Това означава, че $\sin\varphi = 0$. Следователно $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.
■

Използвайки дефиницията на векторно произведение, свойство 1 и теорема 5.3 лесно можем да пресметнем векторните произведения между базисните вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$. Получаваме:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}, & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{o}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}. \end{array}$$

Следователно, ако векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ са зададени с координатите си, то

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k},$$

което лесно можем да запомним чрез използване на детерминанта

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} \tag{5.16}$$

Пример 5.4: Дадени са векторите $\vec{a}(2, -1, 2)$ и $\vec{b}(6, -3, 2)$. Пресметнете $\vec{a} \times \vec{b}$ и $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Решение: 1. Векторното произведение пресмятаме по формула (5.16) и получаваме

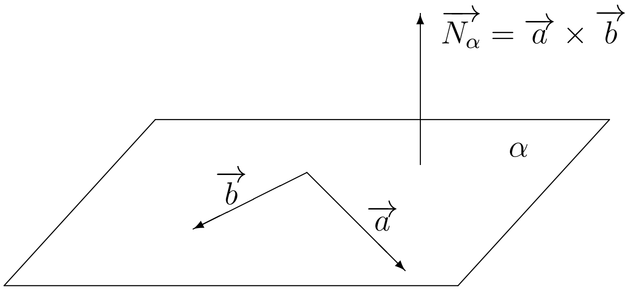
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{i} + 8\vec{j}.$$

2. Дължината на вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ пресмятаме по формула (5.13) и получаваме

$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

Приложения на векторното произведение:

1. Нормален вектор на равнина: Нека са дадени векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и нека определената от тях равнина означим с α. Тогава $\vec{N}_\alpha = \vec{a} \times \vec{b}$ е перпендикулярен (нормален) на равнината.



2. Пресмятане момент на сила: Нека твърдо тяло е закрепено неподвижно в точка A, а в точка B на тялото е приложена сила $\vec{F}$. Тогава в точка A възниква въртящ момент $\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$.

Пример 5.5: Твърдо тяло е закрепено в точката $A(2,1,3)$, а в точка $B(0,1,3)$ е приложена сила $\vec{F}(0,4,3)$. Намерете момента на силата относно точка A и неговата големина.

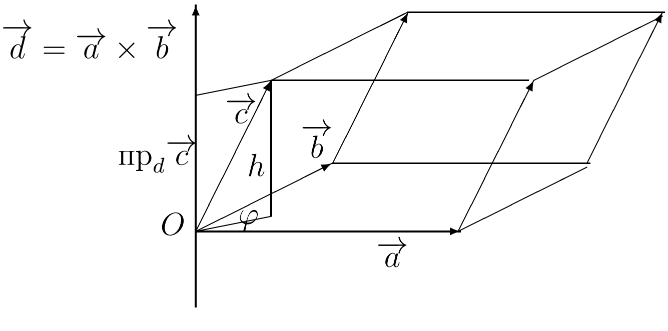
Решение:
Намираме координатите на вектор $\overrightarrow{AB}(-2,0,0)$ и пресмятаме

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{j} - 8\vec{k}$$

Големината на момента е $\left|\vec{M}\right| = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10.$

Дефиниция 5.3 ***Смесено произведение*** *на три вектора $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ наричаме числото, получено от умножаването на първите два вектора векторно, след което получения вектор е умножен с третия вектор скаларно, т.е*

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$$



Нека трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са некомпланарни. Тогава векторът $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ е перпендикулярен на равнината, определена от $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и големината му е равна на лицето на успоредника, определен от двата вектора. Скаларното произведение на векторите $\vec{d}$ и $\vec{c}$ се получава като умножим дължината на $\vec{d}$ по проекцията на $\vec{c}$ върху оста, определена от $\vec{d}$. Но големината на тази проекция е равна на дължината на височината h на паралелепипеда, който трите вектора образуват. Следователно получихме, че обемът на паралелепипеда, определен от трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е равен на $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$.

Ако $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$$= ((a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}).(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}) =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 =$$

$$= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ т.е.} \qquad (5.17)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойства:

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$

2. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$

Доказателство: Доказателството на двете свойства следва непосредствено от (5.17) и познатото ни свойство, че при разместване на два реда на една детерминанта помежду им, тя променя само своя знак.

Теорема 5.4 *Необходимото и достатъчно условие три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ да са компланарни е тяхното смесено произведение да бъде равно на нула.*

Доказателство: 1. Нека трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни. Това означава, че единият от тях се изразява като линейна комбинация на останалите два вектора. Но тогава единият от редовете на детерминантата (5.17) ще бъде линейна комбинация на останалите два реда, а това както знаем означава, че детерминантата е равна на нула, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

2. Обратно, нека сега $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Но тогава от Теорема 4.6 (Глава 4) следва, че някой ред на детерминантата (5.17) е линейна комбинация на останалите два реда, т.е. трите вектора са компланарни. ■

Теорема 5.4 има следното геометрично тълкуване: щом смесеното произведение на трите вектора е нула, това означава, че обемът на паралелепипеда е нула, т.е. трите вектора не образуват паралелепипед. Следователно трите вектора лежат в една равнина.

1. Чрез скаларното произведение лесно можем да проверим дали два вектора са перпендикулярни, да пресметнем дължината на вектор и ъгъла между два вектора.

2. Чрез векторното произведение лесно можем да получим вектор, перпендикулярен на равнината, определена от два неколинеарни вектора и да пресметнем лицето на успоредник или триъгълник.

3. Чрез смесеното произведение лесно можем да проверим дали четири точки лежат в една равнина, както и да пресметнем обема на паралелепипед или пирамида.

Пример 5.6: Дадени са точките $A(1,-5,4)$, $B(0,-3,1)$, $C(-2,-4,3)$, $D(3.5,0,-4.5)$, $E(4,4,-2)$.

1) Да се намери $\sphericalangle ABC$.
2) Да се намери лицето на $\triangle ABC$.
3) Да се докаже, че векторите $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{DE}$ са перпендикулярни.
4) Да се намери вектор $\overrightarrow{x}$ с дължина $\sqrt{10}$, перпендикулярен на равнината, определена от точките A, B, C.
5) Да се докаже, че точките A, B, C и D лежат в една равнина, а точката E не лежи в тази равнина.
6) Да се намери обема на тетраедъра $ABCE$.

Решение:

1) Намираме координатите на векторите $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ и прилагаме формула (5.15).

$$\overrightarrow{BA}(1,-2,3), \quad \overrightarrow{BC}(-2,-1,2)$$

$$\cos\sphericalangle ABC = \cos\sphericalangle(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|.|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-2+2+6}{\sqrt{14}.\sqrt{9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

2)

$$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$$

$$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2+(-8)^2+(-5)^2} = 3\sqrt{10}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}| = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

3) Намираме координатите на векторите $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DE}$ и проверяваме дали скаларното произведение е нула.

$$\overrightarrow{BD}\left(\ \frac{7}{2},\ 3,\ \frac{-11}{2},\ \right) \quad \overrightarrow{DE}\left(\ \frac{1}{2},\ 4,\ \frac{5}{2}\ \right)$$

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DE} = \frac{7}{4} + 12 - \frac{55}{4} = 0$$

Следователно $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{DE}$.

4) $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{BC}$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{x} || (\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC})$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{x} = k(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC})$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{x}(-k, -8k, -5k)$$

$$\Longrightarrow |\overrightarrow{x}| = \sqrt{k^2 + 64k^2 + 25k^2} = 3|k|\sqrt{10}$$

$$\Longrightarrow |k| = \frac{1}{3}\ ,\ k = \pm\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{x}\left(\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{8}{3},\ \pm\frac{5}{3}\ \right)$$

5)

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ \frac{7}{2} & 3 & \frac{-11}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Тъй като смесеното произведение на трите вектора е нула, тези три вектора лежат в една равнина. Следователно и точките $A,\ B,\ C,\ D$ също лежат в една равнина.

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

Следователно точките $A,\ B,\ C$ и E не лежат в една равнина.

6)

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})| = \frac{45}{6}$$

ЗАДАЧИ

5.1. Координатите на върховете на триъгълник са $A(1, -5)$, $B(3, -7)$ и $C(5, -3)$. Намерете координатите на центъра на тежестта на триъгълника.

Решение: Център на тежестта (медицентър) на триъгълник се нарича пресечната точка на медианите. Ако O е произволна точка, а центъра на тежестта означим с G , то е в сила следното векторно равенство

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

От тук следва, че координатите на центъра на тежестта се получават, като се съберат съответните координати на трите върха и сумата се раздели на три. Следователно

$$G(3, -5).$$

5.2. Дадени са точките $A(3,4,-2)$, $M(0,2,1)$ и $N(4,2,3)$. Да се намерят точките B и C така, че M да бъде център на тежестта на триъгълник ABC, а N среда на страната AB.

Решение: Нека координатите на точките B и C са

$$B(x_1, y_1, z_1) \qquad\qquad C(x_2, y_2, z_2).$$

Тъй като N е среда на отсечката AB, то от формулите за среда на отсечка (формули (5.10)) следва

$$\frac{3+x_1}{2} = 4, \qquad \frac{4+y_1}{2} = 2, \qquad \frac{-2+z_1}{2} = 3.$$

Следователно

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 8, \qquad \text{т.е. } B(5,0,8).$$

Сега като използваме предната задача, получаваме:

$$\frac{3+5+x_2}{3} = 0, \qquad \frac{4+0+y_2}{3} = 2, \qquad \frac{-2+8+z_2}{3} = 1.$$

Следователно

$$x_2 = -8, \quad y_2 = 2, \quad z_2 = -3, \qquad \text{т.е. } C(-8,2,-3).$$

5.3. Да се намерят вектори, насочени по ъглополовящите на ъгъла, образуван от векторите $\overrightarrow{a}(2,-2,1)$ и $\overrightarrow{b}(2,4,-4)$.

Решение: Ако два вектора с общо начало имат равни дължини, то тяхната сума и тяхната разлика са вектори, насочени по ъглополовящите съответно на вътрешния и външния ъгъл, образувани от двата вектора. Следователно, за да получим вектори, насочени по ъглополовящите, можем да съберем и извадим съответно единичните вектори по посока на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$.

Пресмятаме дължините на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ по формула (5.13) и получаваме

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3, \qquad |\overrightarrow{b}| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6.$$

Следователно

$$\overrightarrow{a^0}\left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \overrightarrow{b^0}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Вектори, насочени по ъглополовящите са

$$\overrightarrow{l_1} = \overrightarrow{a^0} + \overrightarrow{b^0}, \qquad \overrightarrow{l_2} = \overrightarrow{a^0} - \overrightarrow{b^0}$$

Следователно

$$\overrightarrow{l_1}(1, 0, \frac{-1}{3}), \qquad \overrightarrow{l_2}(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}, 1)$$

5.4. Да се намери вектор, който е перпендикулярен на векторите $\overrightarrow{a}(2, -3, 1)$ и $\overrightarrow{b}(1, -2, 3)$, а скаларното му произведение с вектора $\overrightarrow{d}(1, 2, -7)$ е равно на 10.

Решение: Както знаем, векторното произведение на векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ е вектор, перпендикулярен на двата вектора.
Пресмятаме

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} - 1\overrightarrow{k}.$$

Векторът $\overrightarrow{x}(x_1, y_1, z_1)$, който търсим, също е перпендикулярен на двата вектора и следователно векторите $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{c}$ са колинеарни, т.е. $\overrightarrow{x} = k\overrightarrow{c}(-7k, -5k, -k)$.

От условието $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{d} = 10$ получаваме

$$-7k - 10k + 7k = 10 \qquad \Longrightarrow \qquad k = -1.$$

Следователно

$$\overrightarrow{x}(7, 5, 1).$$

5.5. Да се намери дължината на височината през върха B на триъгълник ABC, ако $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

Решение: Да означим дължината на височината от върха B с h_b. Тогава

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|.h_b.$$

От друга страна (виж трета точка от коментара след дефиницията на векторно произведение)

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Като приравним двете формули за лице на триъгълник, получаваме

$$h_b = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$$

Пресмятаме:

1. $\overrightarrow{AC}(5,4,-8), \quad \overrightarrow{AB}(-1,2,-4)$

2. $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = 28\overrightarrow{j} + 14\overrightarrow{k}$

3. $|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{28^2 + 14^2} = \sqrt{980}$

4. $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{25 + 16 + 64} = \sqrt{105}$

Следователно

$$h_b = \frac{\sqrt{980}}{\sqrt{105}} = \sqrt{\frac{980}{105}} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$$

Задачи за самостоятелна работа:

5.6. Проверете дали точките $A(3,2,-1), B(2,4,2)$ и $C(0,8,8)$ лежат на една права. Отг. Да.

5.7. Проверете дали точките $A(1,3,5)$, $B(-2,1,0)$, $C(4,-2,3)$ и $D(-2,2,4)$ могат да бъдат последователни върхове на трапец. Отг. Не.

5.8. Точките $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$ и $C(5,0,2)$ са последователни върхове на успоредник. Намерете координатите на четвъртия връх. Отг. $D(-1,1,1)$

5.9. Векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ образуват ъгъл $\dfrac{2\pi}{3}$. Ако $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 4$, да се пресметне: а) $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ б) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2$ в) $(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$

Отг. а) -6 б) 13 в) -11

5.10. Дадени са точките $A(4,1,5)$ и $B(-2,-2,3)$. Намерете дължината на вектора $\overrightarrow{AB}$. Отг. 7

5.11. Точките $A(-4,1,1)$, $B(-5,-5,3)$, $C(2,-3,1)$, $D(1,4,0)$ са върхове на тетраедър. Покажете, че два срещуположни ръба на тетраедъра са перпендикулярни.

5.12. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$: $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$, $C(0,0,5)$.

Отг. $\sphericalangle A = \dfrac{\pi}{2}$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \dfrac{\pi}{4}$

5.13. Дадени са векторите $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, за които: $|\overrightarrow{a}| = 10$, $|\overrightarrow{b}| = 1$, $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 6$. Да се намери дължината на векторното им произведение. Отг. 8

5.14. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$ Отг. 14

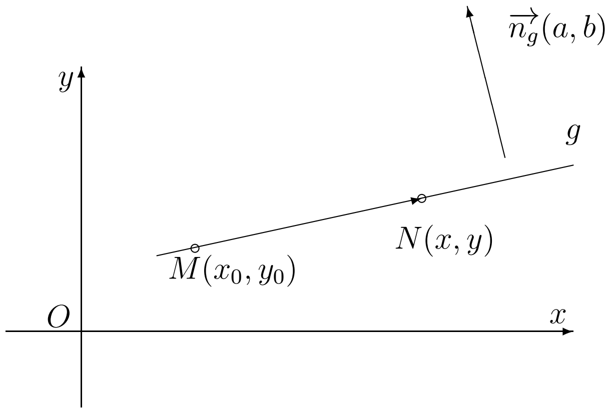
5.15. Докажете, че точките $A(5,7,-2)$, $B(3,1,-1)$, $C(9,4,-4)$ и $D(1,5,0)$ лежат в една равнина.

Глава 6

Права в равнината

1. Уравнение на права, определена от точка и нормален вектор

Нека точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи на g, а векторът $\overrightarrow{n}_g(a, b)$ е перпендикулярен на g.



Нека $N(x, y)$ е произволна точка от g. Тогава

$$N(x,y) \in g \Leftrightarrow \overrightarrow{n_g}(a,b) \perp \overrightarrow{MN}(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_g}.\overrightarrow{MN} = a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0$$

Следователно уравнението на правата g е

$$g: \quad a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \tag{6.1}$$

2. Общо уравнение на права

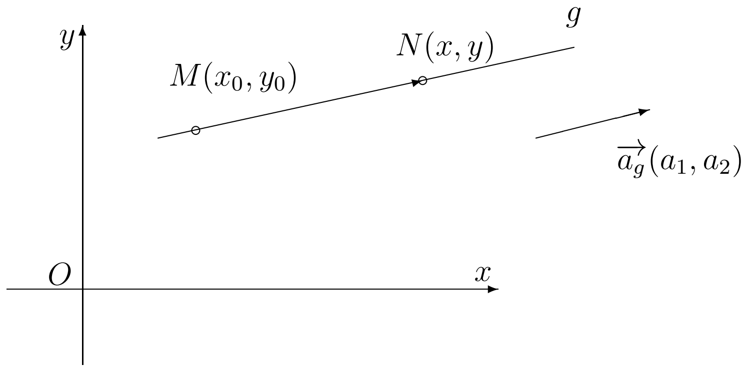
Разкриваме скобите в (6.1) и полагаме $c = -(ax_0 + by_0)$. Получаваме

$$g: ax + by + c = 0, \tag{6.2}$$

където a и b не са едновременно нули. Ако $a^2 + b^2 = 1$ уравнението (6.2) се нарича **нормално** уравнение на правата.

Теорема 6.1 *Всяка права в равнината има уравнение от вида (6.2) и всяко уравнение от вида (6.2), при допълнителното условие $a^2 + b^2 \neq 0$, е уравнение на права в равнината.*

3. Уравнения на права, определена от точка и направляващ вектор

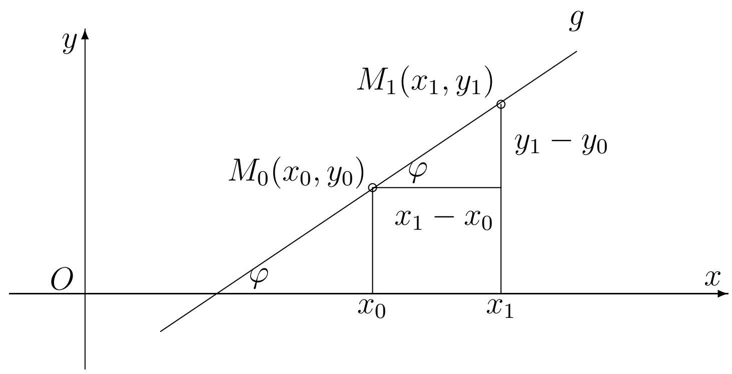


Нека $N(x,y)$ е произволна точка от g. Тогава векторите $\overrightarrow{MN}\ (x-x_0, y-y_0)$ и $\overrightarrow{a}_g(a_1,a_2)$ са колинеарни. Това означава, че $\overrightarrow{MN} = t.\overrightarrow{a}_g$, където $-\infty < t < +\infty$ е параметър. Следователно

$$g: \begin{cases} x = x_0 + a_1.t \\ y = y_0 + a_2.t \end{cases} \tag{6.3}$$

Уравненията (6.3) се наричат скаларно-параметрични уравнения на правата g.

4. Уравнения на права през две точки



От (6.3) следва, че правата g, която минава през точките $M_0(x_0,y_0)$ и $M_1(x_1,y_1)$, т.е. $\overrightarrow{a}_g = \overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0, y_1-y_0)$, има следните уравнения:
а) скаларно-параметрични уравнения

$$g: \begin{cases} x = x_0 + (x_1-x_0)t \\ y = y_0 + (y_1-y_0)t \end{cases} \tag{6.4}$$

б) канонично уравнение

$$g: \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \tag{6.5}$$

Ако правата g минава през точката $M_0(x_0,y_0)$ и е успоредна на оста Ox или оста Oy, от (6.4) следва, че тя има съответно уравнения $y = y_0$ и $x = x_0$.

5. Уравнение на права по точка и ъглов коефициент

Нека правата g не е успоредна на ординатната ос, минава през точката $M_0(x_0, y_0)$ и сключва с положителната посока на абсцисната ос ориентиран ъгъл φ. Тогава уравнението (6.5) можем да преобразуваме във вида

$$g : y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Но

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \varphi$$

Означаваме $k = \operatorname{tg} \varphi$ - **ъглов коефициент** на правата. Така получаваме

$$g : \;\; y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (6.6)$$

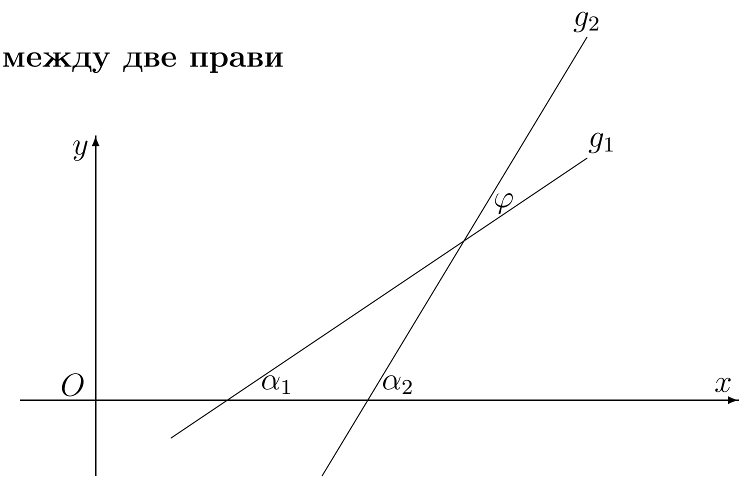
6. Уравнение на права с ъглов коефициент

След разкриване на скобите в (6.6) и полагането $n = y_0 - kx_0$ получаваме

$$g : \;\; y = kx + n, \qquad (6.7)$$

което се нарича **декартово уравнение.** Числото n е отреза, който правата отсича от ординатната ос.

7. Ъгъл между две прави



Нека правите $g_1 : y = k_1x + n_1$ и $g_2 : y = k_2x + n_2$ се пресичат и нека означим с φ ъгъла, на който трябва да бъде завъртяна правата g_1 в положителна посока, докато се слее с правата g_2.
Тогава

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

и като използваме формулата

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

получаваме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (6.8)$$

8. Условия за успоредност и за перпендикулярност на две прави

Очевидно е, че две прави $g_1 : y = k_1x + n_1$ и $g_2 : y = k_2x + n_2$ са успоредни тогава и само тогава, когато имат равни ъглови коефициенти, т.е.

$$g_1 || g_2 \Longleftrightarrow k_1 = k_2 \tag{6.9}$$

Ако двете прави са перпендикулярни, тогава са перпендикулярни и нормалните им вектори $n_{g_1}(k_1, -1)$ и $n_{g_2}(k_2, -1)$. Следователно

$$g_1 \perp g_2 \Longleftrightarrow n_{g_1} \perp n_{g_2} \Longleftrightarrow n_{g_1}.n_{g_2} = 0 \Longleftrightarrow k_1.k_2 = -1 \tag{6.10}$$

9. Разстояние от точка до права

За разстоянието d от точката $M_0(x_0, y_0)$ до правата $g : ax + by + c = 0$ е в сила следната формула

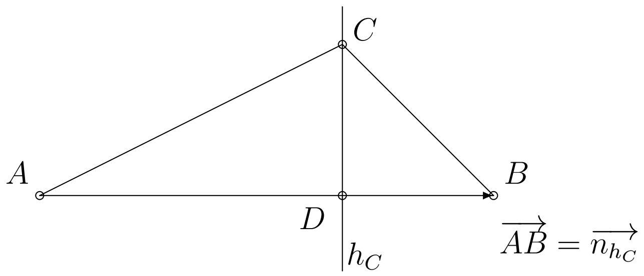
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{6.11}$$

Всяка права разделя равнината на две полуравнини. Ако $ax_0 + by_0 + c > 0$, точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи в онази полуравнина, определена от правата g, към която сочи нормалният вектор $\overrightarrow{n}(a, b)$. Ако пък $ax_0 + by_0 + c < 0$, точката $M_0(x_0, y_0)$ се намира в другата полуравнина.

ЗАДАЧИ

6.1 Точките $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ и $C(3, -2)$ са върхове на $\triangle ABC$. Напишете уравнението на височината h_C през върха C и намерете нейната дължината.

Решение:



Намираме уравнението на AB. Имаме $\overrightarrow{AB}(3, 4)$ и

$$AB : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4}, \qquad \text{т.е. } AB : 4x - 3y - 1 = 0.$$

Векторът $\overrightarrow{AB}(3, 4)$ е нормален за h_C и уравнението на височината е

$$h_C : 3(x-3) + 4(y+2) = 0, \qquad \text{т.е.} \qquad h_C : 3x + 4y - 1 = 0.$$

За да намерим дължината на височината не е необходимо да намираме пресечната и точка D с правата AB, а използваме формула (8.10) за разстоянието от точката C до AB

$$|CD| = \frac{|4.3 - 3.(-2) - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{17}{5}$$

6.2 Намерете ортоцентъра и медицентъра на $\triangle ABC$ с върхове $A(-4, 2)$, $B(2, -5)$, и $C(5, 0)$.

Решение: Намираме уравненията на височините h_A и h_B през върховете A и B. Имаме $\overrightarrow{n}_{h_A} = \overrightarrow{BC} = (3, 5)$, следователно

$$h_A : 3(x + 4) + 5(y - 2) = 0, \quad h_A : 3x + 5y + 2 = 0.$$

Аналогично $\overrightarrow{n}_{h_B} = \overrightarrow{AC} = (9, -2)$ и

$$h_B : 9x - 2y - 28 = 0.$$

Ортоцентърът H е пресечната точка на h_A и h_B.

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 5y + 2 = 0 \\ 9x - 2y - 28 = 0 \end{array} \right. \implies \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{8}{3} \\ y = -2 \end{array} \right. \implies H\left(\frac{8}{3}, -2\right).$$

Координатите на медицентъра $G(x_G, y_G)$ пресмятаме по формулите

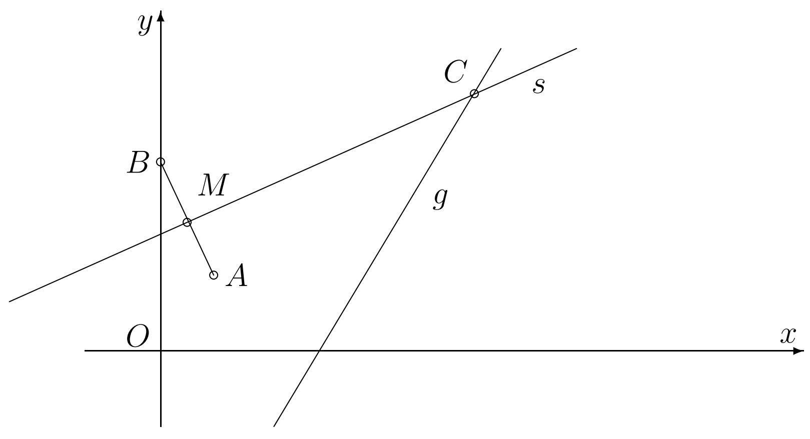
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Следователно

$$x_G = \frac{-4 + 2 + 5}{3} = 1, \qquad y_G = \frac{2 - 5 + 0}{3} = -1.$$

6.3 Точките $A(2, 4)$ и $B(0, 6)$ са върхове на равнобедрен триъгълник $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Намерете третия връх C, ако той лежи на правата $g : 2x - y - 6 = 0$.

Решение:



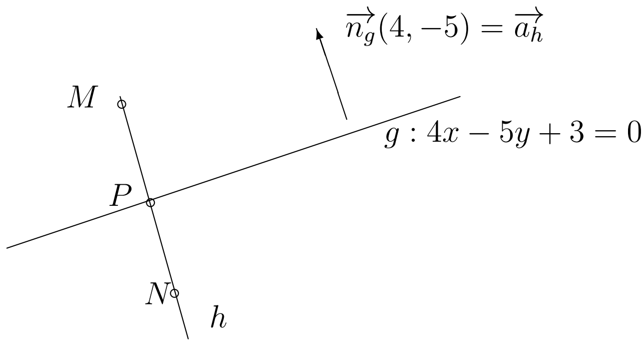
Третият връх C е пресечна точка на симетралата s на отсечката AB и правата g. Нека M е среда на AB. Тогава $M(1,5)$. Векторът $\overrightarrow{AB}(-2,2)$ е нормален за s. Следователно

$$s : -2(x-1) + 2(y-5) = 0$$
$$s : x - y + 4 = 0$$

Решаваме системата от уравненията на s и g и получаваме $C(10,14)$.

6.4 Да се намери точка N, ортогонално симетрична на точката $M(-6,4)$ относно правата $g : 4x - 5y + 3 = 0$.

Решение:



През точката M построяваме права h, перпендикулярна на g. Нормалният вектор $\overrightarrow{n_g}(4,-5)$ на g служи за направляващ на h. Следователно $\overrightarrow{a_h}(4,-5)$, а $\overrightarrow{n_h}(5,4)$. Тогава $h : 5(x+6)+4(y-4) = 0$, т.е. $h : 5x+4y+14 = 0$. Точката P е ортогонална проекция на точката M върху правата g и е пресечна точка на правите g и h

$$\left| \begin{array}{l} 4x - 5y + 3 = 0 \\ 5x + 4y + 14 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow P(-2,-1).$$

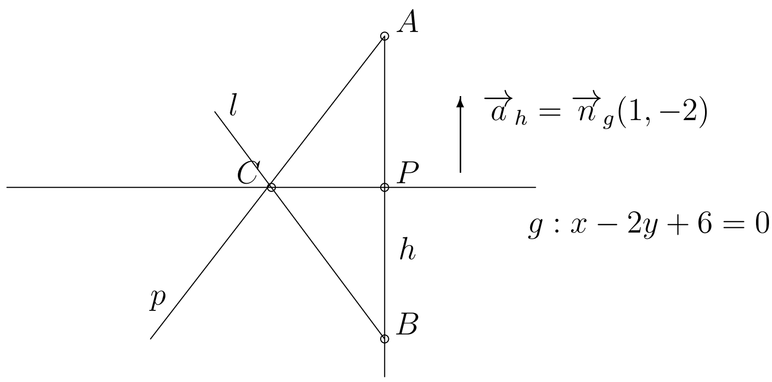
Тъй като P е среда на отсечката MN, то

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2}, \qquad y_P = \frac{y_A + y_B}{2},$$
$$-4 = -6 + x_N, \qquad -2 = 4 + y_N$$

и следователно $x_N = 2, \; y_N = -6$.

6.5 През точката $A(8,12)$ минава светлинен лъч, който се отразява от правата $g : x - 2y + 6 = 0$ в точката $C(4,5)$. Да се намерят уравненията на падащия и отразения лъч.

Решение:



Падащият лъч p е определен от двете точки $A(8,12)$ и $C(4,5)$. Направляващ вектор за p е векторът $\overrightarrow{CA}(4,7)$. Следователно

$$p : \frac{x-8}{4} = \frac{y-12}{7}, \implies p : 7x - 4y - 8 = 0$$

Отразеният лъч ще минава през точка B – ортогонално-симетрична на A спрямо g. Построяваме права h, минаваща през A и перпендикулярна на g. Имаме $\overrightarrow{a_h} = \overrightarrow{n_g}(1,-2)$. Следователно $h : 2x + y - 28 = 0$. Намираме координатите на пресечната точка P на h и g от системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y - 28 = 0 \\ x - 2y + 6 = 0 \end{array} \right.$$

Получаваме $P(10,8)$. Тъй като P е среда на отсечката AB, то:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_P = \frac{y_A + y_B}{2},$$

$$x_B = 2x_P - x_A, \quad y_B = 2y_P - y_A,$$

откъдето $B(12,4)$. Уравнението на отразения лъч l написваме по точките $B(12,4)$ и $C(4,5)$

$$l : x + 8y - 44 = 0$$

6.6 Да се намери уравнението на ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха A на $\triangle ABC$, ако са дадени уравненията на страните му $AB : x + 7y - 7 = 0$, $BC : 9x - 17y + 17 = 0$, $AC : x - y - 7 = 0$.

Решение: Пресичайки две по две дадените три прави, за върховете на $\triangle ABC$ получаваме

$$A(7,0), \quad B(0,1), \quad C(17,10).$$

Тогава

$$\overrightarrow{AB}(-7,1), \implies |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

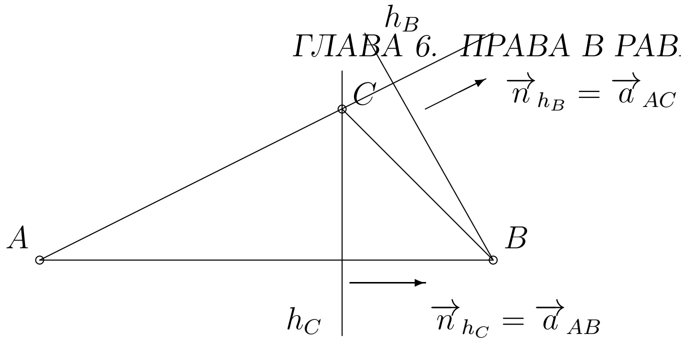
$$\overrightarrow{AC}(10,10), \implies |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 2\sqrt{50}$$

и лесно забелязваме, че векторите $\overrightarrow{AB}(-7,1)$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ имат равни дължини. Следователно тяхната сума ще бъде направляващ вектор за търсената ъглополовяща $\overrightarrow{a_l}(-2,6)$, т.е.

$$l : \frac{x-7}{-1} = \frac{y-0}{3}, \qquad \text{т.е. } l : 3x + y - 21 = 0.$$

6.7 Дадени са координатите на върха $A(-2,-4)$ и уравненията на височините $h_B : x - y - 5 = 0$ и $h_C : 2x - y + 3 = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на другите два върха на триъгълника.

Решение:



Нормалният вектор на h_C служи за направляващ вектор на правата AB. Следователно

$$AB : \frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{-1}, \quad \Longrightarrow \quad AB : x + 2y + 10 = 0$$

Пресечната точка на AB и h_B е точката B.

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y + 10 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -5 \end{array} \right. \Longrightarrow B(0, -5)$$

Нормалният вектор на h_B служи за направляващ вектор на правата AC. Следователно

$$AC : \frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{-1}, \quad \Longrightarrow \quad AC : x + y + 6 = 0$$

Пресечната точка на AC и h_C е точката C.

$$\left| \begin{array}{l} x + y + 6 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow C(-3, -3)$$

6.8 Дадени са уравненията на страната $AB : x + 4y - 13 = 0$ и на височините $h_A : x + 3 = 0$ и $h_B : 3x - y = 0$ в $\triangle ABC$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение: Пресечните точки на двете височини с правата AB са върховете A и B на $\triangle ABC$:

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 4y - 13 = 0 \\ h_A : x + 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow A(-3, 4)$$

$$\left| \begin{array}{l} AB : x + 4y - 13 = 0 \\ h_B : 3x - y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow B(1, 3)$$

Нормалният вектор на h_B служи за направляващ вектор на правата AC. Следователно

$$AC : \frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-1}, \quad \Longrightarrow \quad AC : x + 3y - 9 = 0.$$

Нормалният вектор на h_A служи за направляващ вектор на правата BC. Следователно

$$BC : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0}, \quad \Longrightarrow \quad BC : y - 3 = 0.$$

$$\left| \begin{array}{l} AC : x + 3y - 9 = 0 \\ BC : y - 3 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow C(0, 3)$$

6.9 Дадени са уравненията на страните $AB : x + 3y + 8 = 0$ и $BC : x + 2y + 6 = 0$ на $\triangle ABC$ и ортоцентърът му $H(-2, -9)$. Намерете координатите на върховете на триъгълника.

Решение:
$$\left|\begin{array}{l} AB: x+3y+8=0 \\ BC: x+2y+6=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-2 \end{array}\right. \Longrightarrow B(-2,-2)$$
Нормалният вектор на AB служи за направляващ вектор на височината h_C. Следователно
$$h_C: \frac{x+2}{1}=\frac{y+9}{3}, \quad \Longrightarrow \quad h_C: 3x-y-3=0$$
Върхът C е пресечна точка на h_C и BC .
$$\left|\begin{array}{l} BC: x+2y+6=0 \\ h_C: 3x-y-3=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=0 \\ y=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow C(0,-3)$$
Нормалният вектор на BC служи за направляващ вектор на височината h_A. Следователно
$$h_A: \frac{x+2}{1}=\frac{y+9}{2}, \quad \Longrightarrow \quad h_A: 2x-y-5=0$$
Върхът A е пресечна точка на h_A и AB .
$$\left|\begin{array}{l} AB: x+3y+8=0 \\ h_A: 2x-y-5=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=1 \\ y=-3 \end{array}\right. \Longrightarrow A(1,-3).$$

6.10 Дадени са уравненията на страните $AB: x-4y+34=0$, $AC: 2x+y-4=0$ и на медианата $m_B: x+y+4=0$ в $\triangle ABC$. Намерете уравнението на третата страна на триъгълника.

Решение: Върхът A е пресечна точка на правите AB и AC.
$$\left|\begin{array}{l} AB: x-4y+34=0 \\ AC: 2x+y-4=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=8 \end{array}\right. \Longrightarrow A(-2,8)$$
Върхът B е пресечна точка на правата AB и медианата m_B.
$$\left|\begin{array}{l} AB: x-4y+34=0 \\ m_B: x+y+4=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=-10 \\ y=6 \end{array}\right. \Longrightarrow B(-10,6)$$
Средата M на страната AC е пресечна точка на AC и m_b. Решаваме системата
$$\left|\begin{array}{l} 2x+y-4=0 \\ x+y+4=0 \end{array}\right.$$
и получаваме $M(8,-12)$. Тъй като $M(8,-12)$ е среда на отсечката AC, то лесно намираме върха C:
$$\frac{x_A+x_C}{2}=x_M, \qquad \frac{y_A+y_C}{2}=y_M$$
$$\frac{-2+x_C}{2}=8, \qquad \frac{8+y_C}{2}=-12$$
$$\left|\begin{array}{l} x_C=18 \\ y_C=-32 \end{array}\right. \Longrightarrow C(18,-32)$$
По двете точки $B(-10,6)$ и $C(18,-32)$ написваме уравнението на правата BC.
$$BC: \frac{x+10}{28}=\frac{y-6}{-38}, \qquad BC: 19x+14y+106=0.$$

Задачи за самостоятелна работа:

6.11. Да се определи кои от точките $M_1(2,-1),\ M_2(6,-7),\ M_3(1,1),\ M_4(0,2)$ лежат на правата $g : 3x + 2y - 4 = 0$.

Отг. $M_1,\ M_2,\ M_4$

6.12 Да се определи дали дадените точки лежат в една и съща полуравнина относно правата g.
а) $M_1(0,1)$, $M_2(4,2)$, $g : x - y - 3 = 0$
б) $M_1(2,4)$, $M_2(-2,7)$, $g : y = 2x + 5$

Отг. а) да б) не

6.13 Да се намери пресечната точка на правите g_1 и g_2.
а) $g_1 : 3x + 7y - 15 = 0$, $g_2 : 6x + 14y + 12 = 0$,
б) $g_1 : 2x + 4y - 6 = 0$, $g_2 : 3x + 6y - 9 = 0$,
в) $g_1 : x + y + 8 = 0$, $g_2 : 2x + 3y + 25 = 0$,

Отг. а) успоредни б) сливат се в) $M(1,-9)$

6.14 Да се намерят координатите на върховете на $\triangle ABC$, ако са дадени уравненията на страните му.
а) $AB : 15x + 2y - 3 = 0$, $BC : 16x + y + 7 = 0$, $AC : x - y - 7 = 0$
б) $AB : 2x - y + 4 = 0$, $BC : x - y + 2 = 0$, $AC : x - 2y + 5 = 0$

Отг. а) $A(1,-6)$, $B(-1,9)$, $C(0,-7)$
б) $A(-1,2,)$ $B(-2,0)$, $C(1,3)$

6.15 Да се намерят уравненията на страните на $\triangle ABC$, ако са дадени координатите на върховете му.
а) $A(-4,1)$, $B(5,-2)$, $C(-10,11)$
б) $A(8,-9)$, $B(1,-5)$, $C(13,-6)$

Отг. а) $AB : x + 3y + 1 = 0$, $BC : 13x + 15y - 35 = 0$, $AC : 5x + 3y + 17 = 0$.
б) $AB : 4x + 7y + 31 = 0$, $BC : x + 12y + 59 = 0$, $AC : 3x - 5y - 69 = 0$.

6.16 Да се определи ъгълът между правите g_1 и g_2.
а) $g_1 : y = -2x + 11$ $g_2 : y = 3x - 4$
б) $g_1 : 2x - y - 3 = 0$ $g_2 : x + 2y + 2 = 0$

Отг. а) 45° б) 90°

6.17 Намерете дължината на височината през върха C на $\triangle ABC$: $A(-1,-2)$, $B(2,4)$, $C(1,7)$.

Отг. $\sqrt{5}$

6.18 Намерете разстоянието между успоредните прави $g_1 : 3x + 4y - 15 = 0$ и $g_2 : 3x + 4y + 20 = 0$.

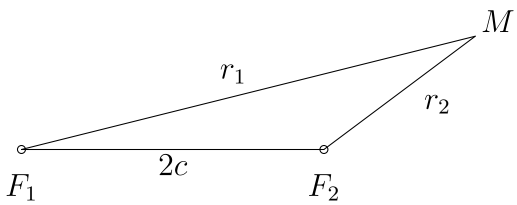
Отг. 7

Глава 7

Елипса, хипербола, парабола

ЕЛИПСА

Нека в равнината са дадени две точки F_1 и F_2 , които ще наричаме фокуси, и нека разстоянието между тях е $2c$.

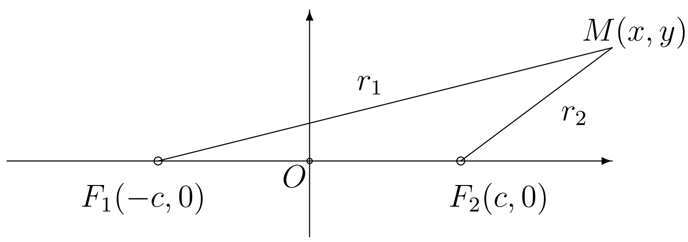


Дефиниция 7.1 *Множеството от точки в равнината, сумата от разстоянията на които до двете дадени точки е постоянна величина, по-голяма от разстоянието между тях, се нарича* ***елипса***.

Ако означим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$ и сумата от двете разстояния с $2a$, то условието от дефиницията можем да запишем по следния начин

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (c < a) \tag{7.1}$$

За да изведем уравнението, което ще удовлетворяват точките от елипсата, ще въведем подходяща правоъгълна координатна система. Абсцисна ос ще минава през двата фокуса, а ординатната ос ще минава през средата на отсечката F_1F_2.



Тогава

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad\qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

и условието (7.1) добива вида

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (a>c) \tag{7.2}$$

За да се освободим от радикалите ще преобразуваме (7.2) като повдигнем двете му страни на квадрат два пъти.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x \tag{7.3}$$

$$(x-c)^2+y^2=a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$(1-\frac{c^2}{a^2})x^2+y^2=a^2-c^2 \tag{7.4}$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Полагаме

$$a^2-c^2=b^2$$

и получаваме

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Разделяме двете страни на a^2b^2 и получаваме

$$(k_1): \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7.5}$$

И така, ако една точка принадлежи на елипсата, координатите и удовлетворяват уравнението (7.5). За да докажем, че това е уравнението на елипса е необходимо да покажем, че за всяка точка $M(x,y)$, която удовлетворява уравнението (7.5), сумата от разстоянията до двата фокуса $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ е $2a$, т.е. тя принадлежи на елипсата.

Тъй като (7.5) е еквивалентно на (7.4), то за r_1 получаваме

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+a^2-c^2-(1-\frac{c^2}{a^2})x^2}=$$

$$\sqrt{(x+c)^2+a^2-c^2-x^2+\frac{c^2}{a^2}x^2}=\sqrt{2cx+a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}$$

Следователно

$$r_1=\left|a+\frac{c}{a}x\right|$$

Аналогично

$$r_2=\left|a-\frac{c}{a}x\right|$$

От (7.5) получаваме

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{a^2}(a^2-x^2) \tag{7.6}$$

И тъй като лявата страна на (7.6) е неотрицателна, получаваме че $|x| \leq a$. Понеже $c < a$, то $\left|\frac{c}{a}x\right| < a$. Тогава

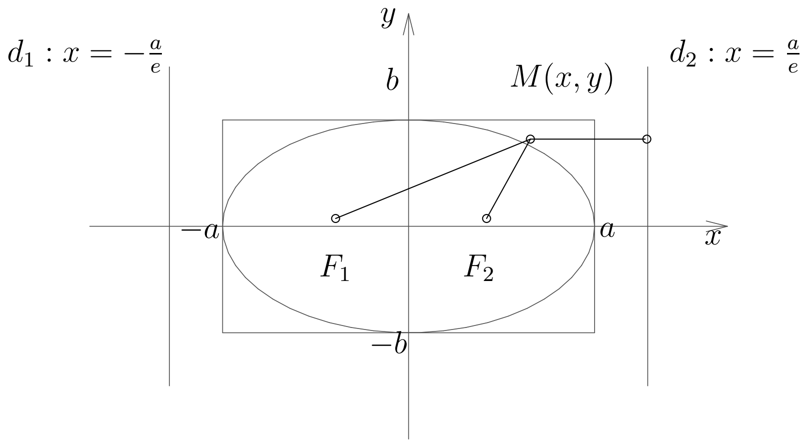
$$a - \frac{c}{a}x \geq 0, \quad a + \frac{c}{a}x \geq 0 \quad \text{и} \quad r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x$$

Следователно

$$r_1 + r_2 = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{c}{a}x = 2a$$

■

От (7.5) следва, че графиката на елипсата лежи във вътрешността на правоъгълник със страни $2a$ и $2b$ и че е симетрична спрямо двете координатни оси. Пресечните точки с координатните оси имат съответно координати $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$ и $(0, b)$. Числото a се нарича *голяма полуос* на елипсата, а b - *малка полуос*.



Да означим

$$\frac{c}{a} = e \tag{7.7}$$

Числото e се нарича **ексцентрицитет** на елипсата. Тъй като $c < a$, то ексцентрицитетът на елипсата е по-малък от единица.

В следващите редове ще докажем друго характеристично свойство на елипсата. Да разгледаме правите с уравнения $d_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $d_2 : x = \frac{a}{e}$. Тези прави се наричат ***директриси*** на елипсата. Да означим разстоянията от произволна точка $M(x, y) \in (k_1)$ до двете директриси с ρ_1 и ρ_2. В сила е следната теорема:

Теорема 7.1

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r_2}{\rho_2} = e$$

Доказателство: Имаме $\quad r_1 = a + ex, \qquad r_2 = a - ex,$

$$\rho_1 = \frac{a}{e} + x = \frac{a + ex}{e}, \qquad \rho_2 = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}.$$

Следователно

$$\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{a + ex}{\frac{a+ex}{e}} = e \qquad \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{a - ex}{\frac{a-ex}{e}} = e$$

Ако в уравнението на елипсата $a = b = R$, то $c = 0$ и двата фокуса ще съвпаднат. Следователно ще получим множество от точки в равнината, които са равноотдалечени от дадената точка, която в този случай наричаме център, а кривата е добре познатата ни окръжност. Следователно каноничното уравнение на окръжност с център $C(0,0)$ и радиус R е

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Ако центърът е точката $C(x_0, y_0)$, тогава уравнението на окръжността е

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Пример 9.1: Да се напише уравнението на окръжност с център $C(2, -3)$ и радиус $R = 5$.

Решение: Уравнението на окръжността е

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

или

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Пример 9.2: Да се покаже, че уравнението $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 16 = 0$ е уравнение на окръжност. Да се намерят центъра и радиуса на окръжността.

Решение: Преобразуваме даденото уравнение с цел да отделим точни квадрати

$$x^2 - 2.x.4 + 16 - 16 + y^2 + 2.y.2 + 4 - 4 - 16 = 0$$

или

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 36$$

Следователно окръжността има център $C(4, -2)$ и радиус $R = 6$.

Нека g е права линия с уравнение $y = kx + n$. Сега ще изведем условие правата g да бъде допирателна до елипсата (7.5). Щом правата g е допирателна до елипсата, то уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + n)^2}{b^2} = 1$$

има единствено решение. Следователно дискриминантата D на

$$b^2x^2 + a^2(kx + n)^2 - a^2b^2 = 0$$

е равна на нула. Последното уравнение е еквивалентно на

$$(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

Следователно

$$D = 4a^4k^2n^2 - 4(a^2k^2 + b^2)a^2(n^2 - b^2) = 0$$

Преобразуваме последователно

$$a^4k^2n^2 - a^2(a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0$$

$$a^2k^2n^2 - (a^2k^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 0$$

$$a^2k^2n^2 - a^2k^2n^2 + a^2k^2b^2 - b^2n^2 + b^4 = 0$$

$$b^2(a^2k^2 - n^2 + b^2) = 0$$

и получаваме

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \tag{7.8}$$

Нека $M(x_1, y_1)$ е точка от елипсата (7.5). Ако правата g е допирателна към елипсата в точката M, тя ще има уравнение

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Използвайки (*от математическия анализ*), че $\quad k = y'(x_1) = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ получаваме

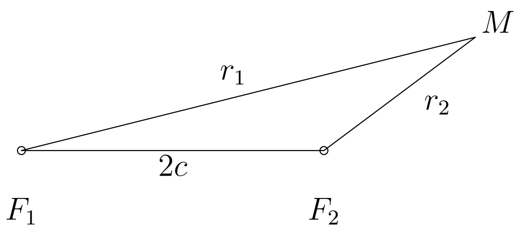
$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$$
$$a^2yy_1 + b^2xx_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

което добива вида

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{7.9}$$

ХИПЕРБОЛА

Нека отново са дадени две точки F_1 и F_2, които ще наричаме фокуси, и нека разстоянието между тях е $2c$.

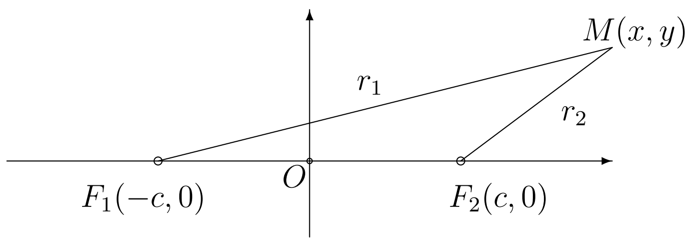


Дефиниция 7.2 *Множеството от точки в равнината, модулът на разликата от разстоянията на които до двете дадени точки е постоянна величина, по-малка от разстоянието между тях, се нарича* ***хипербола****.*

Ако означим $|MF_1| = r_1$, $|MF_2| = r_2$ и разликата от двете разстояния с $2a$, то условието от дефиницията можем да запишем по следния начин

$$|r_1 - r_2| = 2a \qquad (a < c) \tag{7.10}$$

За да изведем уравнението на хиперболата, ще въведем правоъгълна координатна система, както при извеждане уравнението на елипсата.



Тогава

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad\qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

и условието (7.10) добива вида

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \qquad (a<c) \tag{7.11}$$

За да се освободим от радикалите ще преобразуваме (7.11) като повдигнем двете му страни на квадрат два пъти.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2((x-c)^2+y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \tag{7.12}$$

Полагаме

$$c^2 - a^2 = b^2$$

и получаваме

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Разделяме двете страни на a^2b^2 и получаваме

$$(k_2): \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7.13}$$

За да докажем, че полученото уравнение е уравнението на хипербола е необходимо да докажем, че за всяка точка $M(x,y)$, която удовлетворява уравнението (7.13), разликата от разстоянията до двата фокуса $F_1(-c,0)$ и $F_1(c,0)$ е $\pm 2a$. Тъй като (7.13) е еквивалентно на (7.12), то за r_1 получаваме

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 + (\frac{c^2}{a^2}-1)x^2} =$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + a^2 - c^2 - x^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{2cx + a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}$$

Да означим

$$\frac{c}{a} = e > 1 \quad \text{- \textbf{\textit{ексцентрицитет}}} \tag{7.14}$$

Следователно

$$r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right| = |a + ex|$$

Аналогично

$$r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = |a - ex|$$

От (7.13) получаваме

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{1}{a^2}(x^2 - a^2) \tag{7.15}$$

И тъй като лявата страна на (7.15) е неотрицателна, получаваме че

$$x^2 - a^2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-a)(x+a) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, -a] \quad \text{или} \quad x \in [a, \infty)$$

Следователно трябва да разгледаме два случая:

<u>1. $x \leq -a$</u> Тъй като $e > 1$, следва че $a + ex < 0$ и $a - ex > 0$. Тогава

$$r_1 = -a - ex \qquad r_2 = a - ex \tag{7.16}$$

Следователно $r_1 - r_2 = -a - ex - a + ex = -2a$.

<u>2. $x \geq a$</u> В този случай $a + ex > 0$, а $a - ex < 0$. Тогава

$$r_1 = a + ex \qquad r_2 = -a + ex \tag{7.17}$$

Следователно $r_1 - r_2 = a + ex + a - ex = 2a$ и с това доказахме, че наистина (7.13) е уравнението на хиперболата. ■

От (7.15) получаваме

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Да разгледаме и правите с уравнения

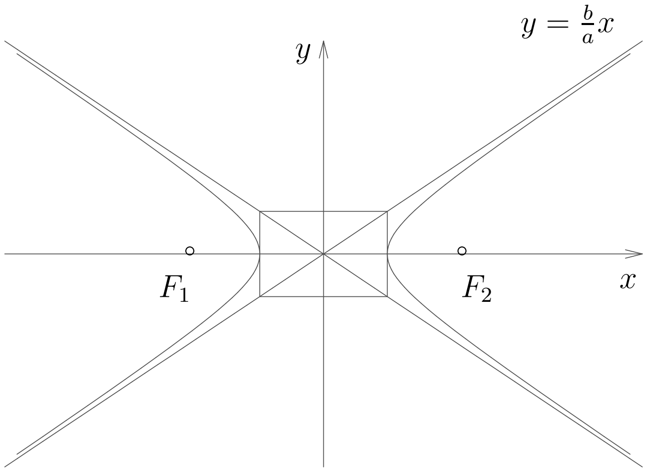
$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

В следващите редове ще докажем, че когато $x \to \infty$, графиката на хиперболата се доближава до графиката на съответната права линия. Наистина:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) =$$

$$\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = ab\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

Правите с уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$ се наричат ***асимптоти*** на хиперболата.



Аналогично на елипсата, условието права линия с уравнение $y = kx + n$ да бъде допирателна на хиперболата (7.13) е

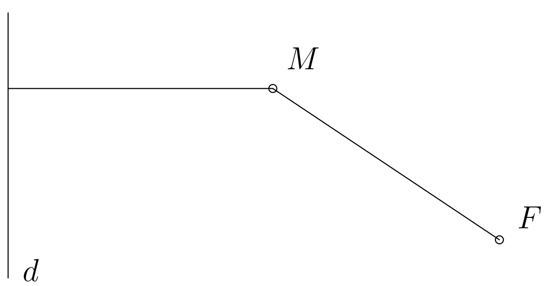
$$a^2k^2 - b^2 = n^2 \tag{7.18}$$

Ако правата е допирателна в точката $M(x_1, y_1)$ от хиперболата, то нейното уравнение е

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \tag{7.19}$$

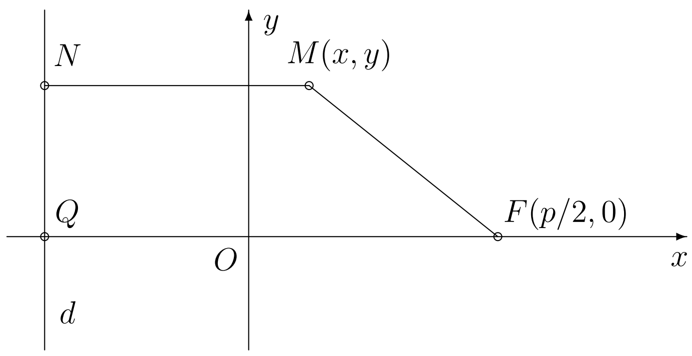
ПАРАБОЛА

Нека са дадени точка F, наречена фокус, и права d, наречена директриса.



Дефиниция 7.3 *Множеството от точки в равнината, които са равноотдалечени от фокуса и от директрисата, се нарича* ***парабола***.

За да изведем уравнението на параболата, ще въведем подходяща правоъгълна координатна система. Абсцисната ос минава през фокуса и е перпендикулярна на директрисата, а ординатната ос разполовява разстоянието между фокуса и директрисата.



Да означим разстоянието от фокуса F до директрисата d с p. Тогава

$$|OQ| = |OF| = \frac{p}{2}$$

Точката F има координати $F(p/2, 0)$, а

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \qquad \text{и} \qquad |MN| = x + \frac{p}{2}$$

Следователно за точките $M(x, y)$ от параболата е изпълнено

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$

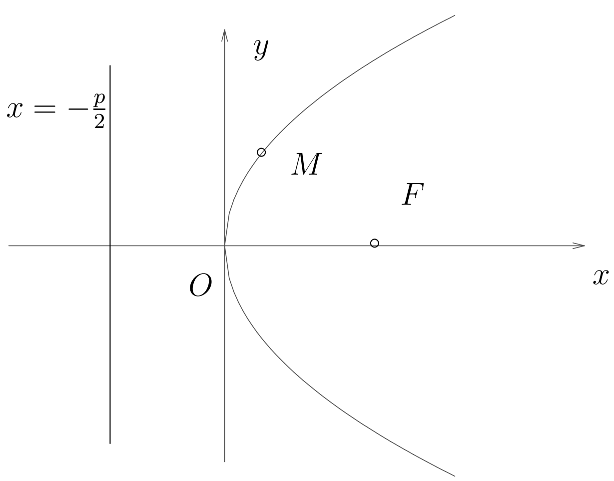
Повдигаме двете страни на последното равенство на квадрат и получаваме

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px \tag{7.20}$$

Уравнението (7.20) се нарича *канонично уравнение на парабола.*



Уравнението на допирателната в точката $M(x_1, y_1)$ от параболата е

$$yy_1 = p(x + x_1) \tag{7.21}$$

Елипсата, хиперболата и параболата притежават следните забележителни свойства:

1. Допирателната в дадена точка M на елипсата образува равни ъгли с фокалните радиуси F_1M и F_2M и лежи вън от ъгъла F_1MF_2.

2. Допирателната в дадена точка M на хиперболата образува равни ъгли с фокалните радиуси F_1M и F_2M, като разполовява ъгъла F_1MF_2.

3. Допирателната в дадена точка M на параболата образува равни ъгли с фокалния радиус FM и лъча през M, който е успореден на оста на параболата и е в нейната вътрешност.

ЗАДАЧИ

7.1 Напишете уравнението на окръжност с диаметър $AB: \ A(-4, 1), \ B(2, 3)$.

Решение: Центърът на окръжността $C(-1, 2)$ е средата на отсечката AB, а радиусът е $R = |CB| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$. Следователно уравнението на окръжността е $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ или $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$

7.2 Напишете уравненията на допирателните към окръжността $(k): x^2 + y^2 = 5$, които са успоредни на правата $g: 2x - y + 1 = 0$.

Решение: Тъй като допирателните са успоредни на правата g, те имат уравнения от вида $y = 2x + n$. Тогава системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y + n = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right.$$

трябва да има единствено решение. Това означава, че квадратното уравнение $x^2 + (2x+n)^2 = 5$ трябва да има единствено решение. След преобразуване уравнението добива вида $5x^2 + 4nx + n^2 - 5 = 0$. Пресмятаме неговата дискриминанта и я приравняваме на нула.

$$D = 16n^2 - 20(n^2 - 5) = 0, \qquad \text{т.е.} \quad n = \pm 5$$

Следователно уравненията на допирателните са $y = 2x + 5, \ \ y = 2x - 5$.

7.3 Напишете уравнението на окръжност, която е описана около триъгълника с върхове $A(7, 7)$, $B(0, 8)$, $C(-2, 4)$.

Решение: Центърът на окръжността G е пресечна точка на симетралите на две от страните (например AC и BC), а радиусът е разстоянието от центъра до връх на триъгълника.

Намираме симетралите $s_1 : 3x + y - 13 = 0$ и $s_2 : x + 2y - 11 = 0$ на страните AC и BC. (Направете това сами, виж зад. 8.3 от глава 8.) Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y - 11 = 0 \\ 3x + y - 13 = 0 \end{array} \right.$$

и получаваме центъра $G(3, 4)$. Радиусът на окръжността е $R = |GB| = \sqrt{9 + 16} = 5$. Следователно търсеното уравнение е $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

7.4 Напишете декартовото уравнение на окръжността $\rho = \sin\theta + \cos\theta$.

Решение: Използваме, че

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Следователно

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Преобразуваме и получаваме

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \text{ или } (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$$

7.5 Напишете каноничното уравнение на елипсата, ако $a = 12, \ e = 0.5$

Решение: От $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ и $a = 12$ получаваме, че $c = 6$. Тогава $b^2 = a^2 - c^2 = 144 - 36 = 108$. Следователно уравнението на елипсата е

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1$$

7.6 Напишете каноничното уравнение на хипербола, ако $2a = 20, \ 2c = 30$

Решение: Имаме $a = 10, \ c = 15$. Тогава $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 100 = 125$. Следователно уравнението на хиперболата е

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{125} = 1$$

7.7 Установете, че уравнението $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ е уравнение на парабола и определете координатите на нейния връх.

Решение: Преобразуваме уравнението $x + 3y^2 + 8y + 2 = 0$ по следния начин

$$x - 2 = -3\left(y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} - \frac{16}{9}\right)$$

$$x - 2 = -3\left(y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9}\right) + \frac{16}{3}$$

$$x - \frac{10}{3} = -3\left(y + \frac{4}{3}\right)^2$$

Полагаме

$$x - \frac{10}{3} = X, \qquad y + \frac{4}{3} = Y$$

и получаваме

$$X = -3Y^2$$

При $X = 0$ и $Y = 0$ получаваме, че върхът на параболата е $A(10/3, -4/3)$.

Задачи за самостоятелна работа:

7.8 Напишете уравнението на окръжност с център C и радиус R.

а) $C(2,1)$, $R = 5$
б) $C(2,-3)$, $R = 2$
в) $C(-4,1)$, $R = 3$
г) $C(-1,-5)$, $R = 1$

Отг. а) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
б) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
в) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$
г) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 25 = 0$

7.9 Покажете, че следните уравнения са уравнения на окръжност. Намерете центъра на окръжността C и радиуса R.

а) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$
б) $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$
в) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$
г) $x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0$

Отг.
а) $C(1,-1)$, $R = 2$
б) $C(0,-2)$, $R = \sqrt{5}$
в) $C(-2,3)$, $R = 4$
г) $C(1/2,-1)$, $R = 3/2$

7.10 Напишете уравнението на окръжност с диаметър AB.

а) $A(3,2)$, $B(5,6)$
б) $A(-1,-3)$, $B(-3,1)$

Отг. а) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$
б) $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 0$

7.11 Намерете дължината на хордата, която правата с уравнение $y = x - 4$ отсича от окръжността $(k) : x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$.

Отг. $d = \sqrt{2}$

7.12 Напишете уравнението на общата хорда на окръжностите $(k_1): x^2+y^2=10$ и $(k_2): x^2+y^2-10x-10y+30=0$.

Отг. $x+y-4=0$

7.13 Напишете уравнението на окръжност, която е вписана в триъгълника, ограничен от координатните оси и правата с уравнение $3x+4y-12=0$.

Отг. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

7.14 Напишете декартовите уравнения и начертайте следните окръжности:

а) $\rho = 4\sin\theta$
б) $\rho = \cos\theta$

Отг. а) $x^2+y^2-4y=0$
б) $x^2+y^2-x=0$

7.15 Напишете каноничното уравнение на елипсата, ако:

а) $2c=10, \quad a=8$
б) $2c=10, \quad b=4$

Отг. а) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

б) $\frac{x^2}{41}+\frac{y^2}{16}=1$

7.16 Намерете уравненията на допирателните към елипсата с уравнение $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, които са успоредни на правата $g: 2x-y+17=0$.

Отг. $y=2x+12, \quad y=2x-12$

7.17 Напишете каноничното уравнение на елипса, която се допира до правите $x+y-5=0$ и $x-4y-10=0$.

Отг. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

7.18 Напишете уравненията на общите допирателни на елипсите $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ и $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

Отг. $x+y=\pm 3, \quad x-y=\pm 3$

7.19 Напишете каноничното уравнение на хипербола, ако:

а) $a=5, \quad e=1.4$
б) $2c=10, \quad y=0.5x$ – асимптота

Отг. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$

б) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$

7.20 Дадена е хиперболата $x^2-y^2=8$. Напишете каноничното уравнение на хипербола със същите фокуси, минаваща през точката $M(-5,3)$.

Отг. $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$

7.21 Напишете каноничното уравнение на хипербола с асимптота $y = 0.5x$, която се допира до правата $5x - 6y = 8$.

Отг. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

7.22 Напишете каноничното уравнение на хипербола, която се допира до правата $x - y = 2$ в точка $M(4, 2)$.

Отг. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

7.23 Напишете каноничното уравнение на хипербола, която има за фокуси върховете на елипсата $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ и минава през нейните фокуси.

Отг. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$

7.24 Установете, че следните уравнения са уравнения на параболи и определете координатите на върховете им.
а) $y = 4x^2 - 8x + 4$
б) $y = 2x^2 + 4x + 5$
в) $y = -x^2 + 2x$

Отг. а) $A(1, 0)$ б) $A(-1, 3)$ в) $A(1, 1)$

7.25 Намерете уравненията на допирателните към параболата $y^2 = 36x$, които минават през точката $M(2, 9)$.

Отг. $y = 3x + 3, \quad 2y = 3x + 12$

7.26 Намерете най-късото разстояние от параболата $y^2 = 64x$ до правата с уравнение $4x + 3y + 46 = 0$.

Отг. $d = 2$, най-близка точка $A(9, -24)$

Глава 8

Функция. Граница на функция

I. Безкрайни числови редици

Дефиниция 8.1 *Казва се, че е дефинирана безкрайна* ***числова редица***

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_n,\ \dots\ ,$$

ако на всяко естествено число n *по определено правило е съпоставено число* a_n*.*

Числата $a_1,\ a_2,\ \dots$ се наричат **членове на редицата;** a_n се нарича **общ член** на редицата.

За числова редица ще използваме означението $\{a_n\}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена,** ако съществува краен и затворен интервал $[m, M]$, съдържащ всички членове на редицата, т.е. такъв, че за всяко n да бъде изпълнено $m < a_n < M$.

Известно е, че между реалните числа и точките от реалната права има взаимно-еднозначно съответствие. Поради тази причина ще отъждествяваме "числото a" с "точката a".

Дефиниция 8.2 ***Околност*** *на точката* a *наричаме всеки отворен интервал, съдържащ тази точка. Интервалът* $(a-\varepsilon\,,\,a+\varepsilon)$ *наричаме* $\varepsilon-$***околност*** *на точката* a*.*

Условието $a_n \in (a-\varepsilon\,,\,a+\varepsilon)$ може да се запише по няколко начина:

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \iff |a_n - a| < \varepsilon.$$

Дефиниция 8.3 *Числото* a *се нарича* ***граница на редицата*** $\{a_n\}$*, ако за всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува такова число* N*, че за всяко* $n > N$ *е изпълнено* $|a_n - a| < \varepsilon$*.*

Това се означава с $\lim\ a_n = a$ или $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \longrightarrow a$.

Редица, която има граница, се нарича **сходяща.** Редица, която не е сходяща, се нарича **разходяща.**

Теорема 8.1 *Всяка сходяща числова редица е ограничена.*

Доказателство: Според дефиниция 1.3, каквото и $\varepsilon > 0$ да изберем, на него съответства такова число N, че всички членове на редицата $\{a_n\}$ с индекс (номер) n по-голям от N, т.е. всички от известно място нататък, се намират в $\varepsilon-$околност на точката a. Следователно извън тази околност остават краен брой членове. Това означава, че можем да намерим числа m и M такива, че $m < a_n < M$ за всяко n. ∎

Теорема 8.2 *Ако* $\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b$ *и ако за всяко* n *имаме* $a_n \leq b_n$, *то* $a \leq b$.

Доказателство: Да допуснем, че $a > b$ и да изберем $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$.

Тогава съществува число N_1, такова че при $n > N_1$ е изпълнено

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Аналогично съществува число N_2, такова че при $n > N_2$ е изпълнено

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$

Но очевидно

$$b + \varepsilon = a - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

Следователно за $n > max\,(N_1, N_2)$ е изпълнено

$$b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n,$$

противоречие. Следователно $a \leq b$. ■

Следващата теорема е известна като теорема (лема) за двамата полицаи.

Теорема 8.3 *Ако* $\lim a_n = \lim b_n = l$ *и* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *за всяко* n, *то* $\lim c_n = l$.

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$. Тогава съществува число N_1, такова че при $n > N_1$ е изпълнено

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon.$$

Аналогично съществува число N_2, такова че при $n > N_2$ е изпълнено

$$l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon.$$

Тогава за $n > max\,(N_1, N_2)$ е изпълнено

$$l - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \varepsilon,$$

т.е. $\lim c_n = l$. ■

Теорема 8.4 *Ако* $\lim a_n = a$ *и* $\lim b_n = b$, *то:*

1. $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$

2. $\lim(a_n.b_n) = \lim a_n . \lim b_n = a.b$

3. *Ако* $b_n \neq 0$ *за всяко* n *и* $b \neq 0$, *то* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **монотонно растяща,** ако за всяко n е изпълнено $a_n \leq a_{n+1}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **монотонно намаляваща,** ако за всяко n е изпълнено $a_n \geq a_{n+1}$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена отгоре,** ако съществува такова число M, че за всяко n е изпълнено $a_n < M$.

Редицата $\{a_n\}$ е **ограничена отдолу,** ако съществува такова число m, че за всяко n е изпълнено $m < a_n$.

Теорема 8.5 *Всяка монотонна и ограничена числова редица е сходяща.*

Теоремата можем да разделим на две твърдения:

1. Всяка монотонно растяща и ограничена отгоре редица е сходяща.
2. Всяка монотонно намаляваща и ограничена отдолу редица е сходяща.

Дефиниция 8.4 *Казваме, че редицата* $\{a_n\}$ *клони (дивергира) към плюс безкрайност (* $a_n \longrightarrow +\infty$ *), ако за всяко положително число* M *съществува такова число* N, *че от* $n > N$ *да следва* $a_n > M$.

Казваме, че редицата $\{a_n\}$ *клони (дивергира) към минус безкрайност (* $a_n \longrightarrow -\infty$ *), ако за всяко отрицателно число* M *съществува такова число* N, *че от* $n > N$ *да следва* $a_n < M$.

Теорема 8.6 *Ако* $\lim a_n = \pm\infty$, *то* $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$ *и обратно, ако* $\lim a_n = 0$, *то* $\lim \dfrac{1}{a_n} = \pm\infty$.

Основни граници

1. $$\lim n^k = \begin{cases} +\infty, & k > 0, \\ 0, & k < 0, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

2. $$\lim q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1, \\ 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1. \end{cases}$$

3. Ако $\lim a_n = a > 0$, то $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

4. $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

5. $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, където числото $e \approx 2,7182$ се нарича **Неперово число**.

Обърнете внимание

$$\text{Ако } \lim a_n = \infty, \quad \text{то } \lim \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Например: $$\lim \left(1 + \frac{1}{n^2 - 3}\right)^{n^2-3} = e.$$

ЗАДАЧИ

8.1 Намерете границата $\lim \dfrac{n^3-3n^2+1}{2n^3-5n^2+4n-3}$.

Решение:

$$\lim \frac{n^3-3n^2+1}{2n^3-5n^2+4n-3} = \lim \frac{n^3\left(1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2-\dfrac{5}{n}+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}\right)} =$$

$$= \lim \frac{1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{5}{n}+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}} = \frac{1-0+0}{2-0+0-0} = \frac{1}{2}.$$

8.2 Намерете границата $\lim \dfrac{n^4-3n+5}{2n^2-n-3}$.

Решение:

$$\lim \frac{n^4-3n+5}{2n^2-n-3} = \lim \frac{n^4\left(1-\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}\right)}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)} = \lim \frac{n^2\left(1-\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}\right)}{\left(2-\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)} = +\infty$$

8.3 Намерете границата $\lim \dfrac{n^4-2n+4}{2n^5-2n-3}$.

Решение:

$$\lim \frac{n^4-2n+4}{2n^5-2n-3} = \lim \frac{n^4\left(1-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}\right)}{n^5\left(2-\dfrac{2}{n^4}-\dfrac{3}{n^5}\right)} = \lim \frac{\left(1-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}\right)}{n\left(2-\dfrac{2}{n^4}-\dfrac{3}{n^5}\right)} = 0$$

8.4 Намерете границата $\lim \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$.

Решение:

$$\lim \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}} = \lim \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)} =$$

$$= \lim \frac{\left(n+1+2\sqrt{n+1}.\sqrt{n-1}+n-1\right)}{(n+1)-(n-1)} = \lim \frac{\left(2n+2\sqrt{n^2-1}\right)}{2} =$$

$$= \lim \left(n+\sqrt{n^2-1}\right) = +\infty$$

8.5 Намерете границата $\quad \lim\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$

Решение:

$$\lim\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=0.$$

8.6 Намерете границата $\quad \lim\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}.$

Решение:

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}=\lim\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{n}}=\lim\frac{1}{\left(\dfrac{n-1+1}{n-1}\right)^{n}}=$$

$$=\lim\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}=e^{-1},$$

$$\text{защото}\quad \lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=e\quad\text{и}\quad\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=1.$$

Задачи за самостоятелна работа:

Да се намерят границите на редиците с общ член:

8.7 $\quad a_n=\dfrac{15n-1}{11+3n}$ Отг. 5.

8.8 $\quad a_n=\dfrac{(n-1)^2}{2n^3}$ Отг. 0.

8.9 $\quad a_n=\dfrac{5n^3-n^2+n+3}{n^3+5n-1}$ Отг. 5.

8.10 $\quad a_n=\dfrac{2n^4-n^3+7n+15}{n^5-2n^3+5n^2-4}$ Отг. 0.

8.11 $\quad a_n=\dfrac{2n-1}{5n+7}-\dfrac{2n^3+1}{5n^3+2}$ Отг. 0.

8.12 $\quad a_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^4+5n-2}}{n-1}$ Отг. $+\infty$.

8.13 $\quad a_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n}$ Отг. 0.

8.14 $\quad a_n=\sqrt{3n+5}-\sqrt{n-1}$ Отг. $+\infty$.

8.15 $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}+n}$ Отг. 1.

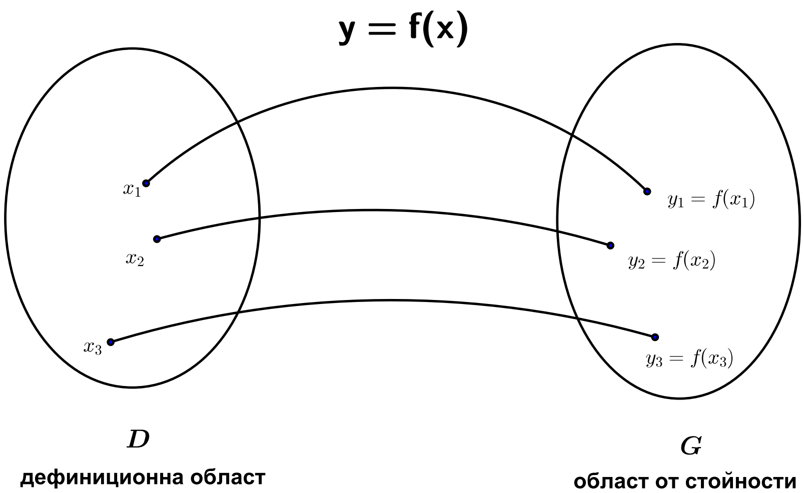
8.16 $a_n = \dfrac{n!(n+3)}{(n+2)!-(n+1)!}$ Отг. 0.

С $n!$ (произнася се **n факториел**) се означава произведението на естествените числа от 1 до n, т.е. $n! = 1.2.3\dots n$. По дефиниция $0! = 1$.

II. Функция

Понятието функционална зависимост е едно от основните понятия в математиката и играе главна роля в нейните приложения.

Дефиниция 8.5 *Нека D е числово множество и нека по определено правило на всяко число $x \in D$ е съпоставено по едно реално число $f(x)$. Тогава се казва, че в множеството D е зададена функция.*

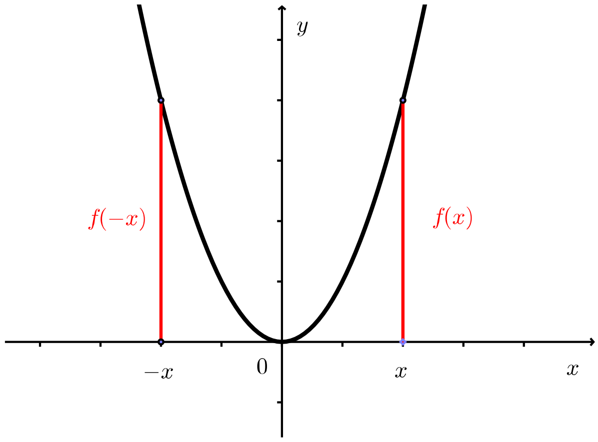


Най-често функцията означаваме с $y = f(x)$, където x е **аргумент** или **независима променлива**, а y е **зависимата променлива**.

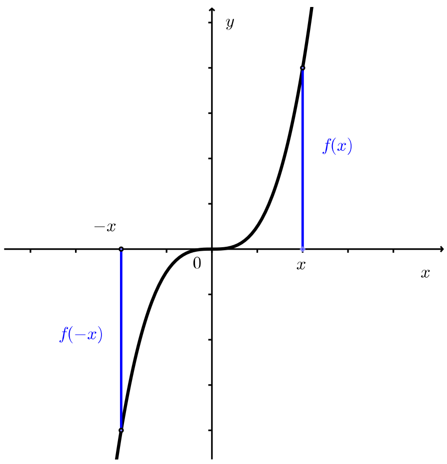
Множеството D се нарича **дефиниционно множество** или **дефиниционна област.** Множеството от всички стойности $y = f(x)$, $x \in D$, се нарича **област от стойности** на функцията или **образ** на множеството D.

Ако в равнината имаме правоъгълна координатна система Oxy, множеството от точки с координати $(x, f(x))$, $x \in D$, се нарича **графика** на функцията $y = f(x)$ или **крива** с уравнение $y = f(x)$.

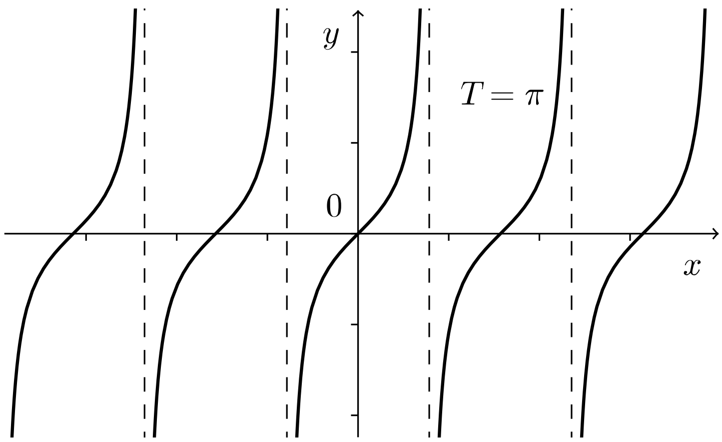
Функцията $y = f(x)$ се нарича **четна,** ако $f(-x) = f(x)$. Графиката на такава функция е ***симетрична относно ординатната ос***.



Функцията $y = f(x)$ се нарича **нечетна,** ако $f(-x) = -f(x)$. Графиката на такава функция е ***симетрична относно координатното начало***.



Функцията $y = f(x)$ се нарича **периодична,** ако $f(x+T) = f(x)$. Най-малкото положително число T с това свойство се нарича **период** на функцията.



Функцията $f(x)$ се нарича **строго растяща**, ако от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) < f(x_2)$. Функцията $f(x)$ се нарича **строго намаляваща**, ако от $x_1 < x_2$ следва $f(x_1) > f(x_2)$.

Ако съществува число M, така че $|f(x)| < M$ за всяко $x \in D$, то функцията $f(x)$ се нарича **ограничена.** С други думи една функция е ограничена, ако нейното множество от функционални стойности е ограничено.

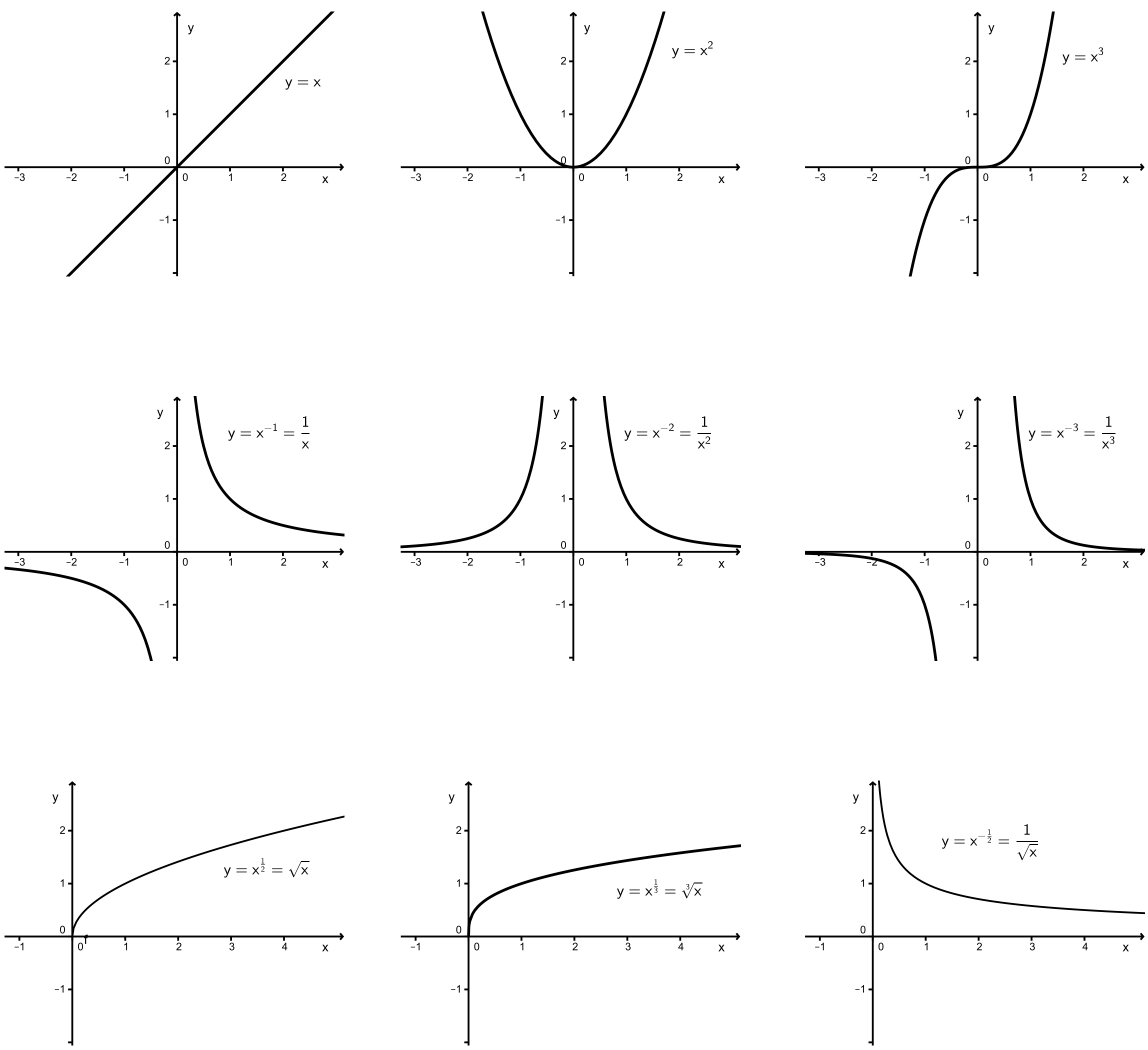
Следващите функции се изучават в училищния курс по математика и се наричат

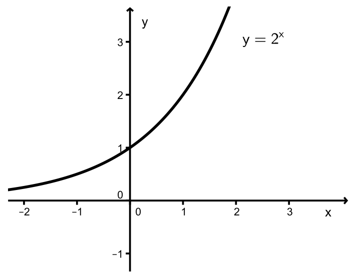
Основни елементарни функции

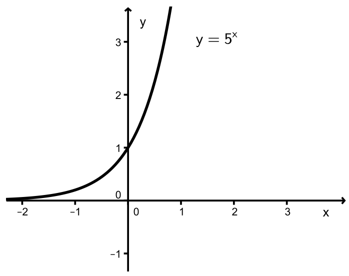
1. $y = x^\alpha, \quad x > 0, \quad \alpha$- реално число	**степенна функция**
2. $y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	**показателна функция**
3. $y = \log_a x, \quad x > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	**логаритмична функция**
4. $y = \sin\, x,\ y = \cos\, x,\ y = \operatorname{tg}\, x,\ y = \operatorname{cotg}\, x$	**тригонометрични функции**

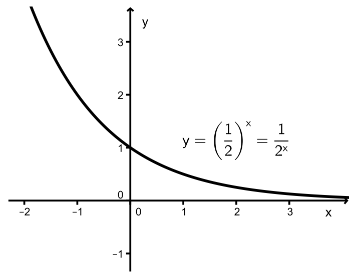
Функцията $\sin\, x$ е нечетна, а функцията $\cos\, x$ е четна. Двете функции са периодични с период $T = 2\pi$. Функциите $\operatorname{tg}\, x$ и $\operatorname{cotg}\, x$ са нечетни и са периодични с период $T = \pi$.

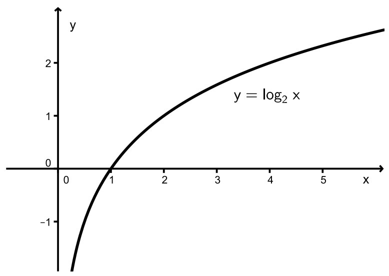
Следващите графики са графики на основни елементарни функции.

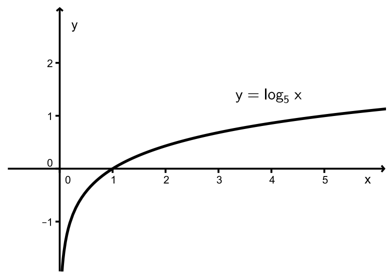


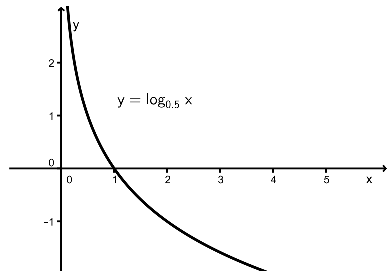






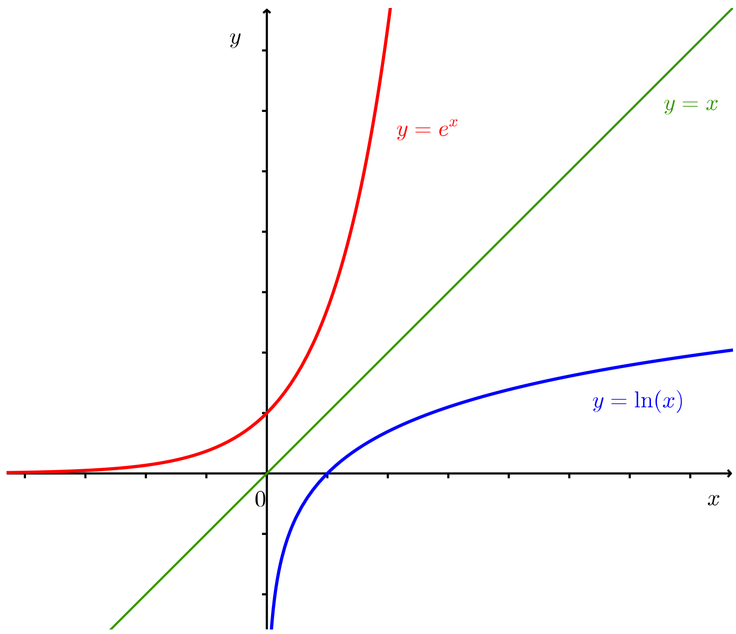






Ако $a = e,$ то функцията $y = e^x$ се нарича **експоненциална функция**, а $y = \log_e x = \ln x$ се нарича **натурален логаритъм**.

Графиките на двете функции са представени на следващата фигура.

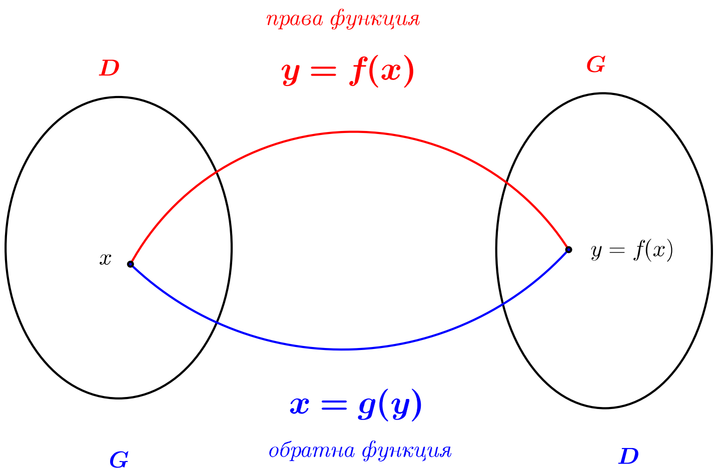


Дефиниция 8.6 *Функцията $f(x)$ се нарича* ***обратима****, ако от неравенството $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$, т.е. когато на различни стойности на аргумента съответстват различни стойности на функцията.*

Това условие, разбира се, не е изпълнено за всяка функция. Очевидно е обаче, че то е в сила за всяка строго растяща или строго намаляваща функция, т.е. строго растящите и строго намаляващите функции са обратими.

Дефиниция 8.7 *Нека функцията $y = f(x),\ x \in D,\ y \in M$ е обратима. Функцията $x = g(y),\ y \in M,\ x \in D$, която на произволна стойност $y_0 \in M$*

съпоставя онази стойност $x_0 \in D$, *за която* $f(x_0) = y_0$, *се нарича* ***обратна*** *на функцията* $y = f(x)$.



От дефиницията виждаме, че областта от стойности на дадената функция служи за дефиниционна област на обратната функция, а дефиниционната област служи за област от стойности на обратната функция.

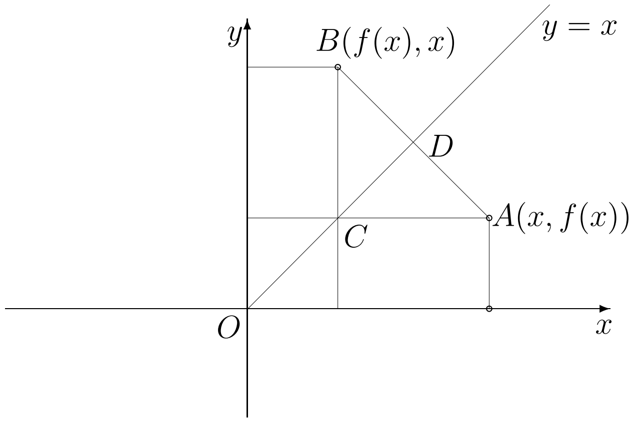
Обратната функция на $f(x)$ $(x \in D)$ се бележи с $f^{-1}(x)$ $(x \in M)$. Често двойката функции $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ се наричат права и обратна функции.

Очевидно е, че са в сила следните равенства:

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad x \in M \qquad \text{и} \qquad f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D.$$

Графиките на двете функции (права и обратна) са симетрични спрямо ъглополовящата на първи и трети квадрант. Лесно е да се убедим в това чрез следващия чертеж.

Наистина, нека точка $A(x, f(x))$ лежи на графиката на правата функция $f(x)$. Тогава точка $B(f(x), x)$ лежи на графиката на обратната функция. Вижда се, че $\triangle ABC$ е правоъгълен и равнобедрен. Тогава CD е ъглополовяща, височина и медиана. Следователно $AD = BD$.



Пример: Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ в интервала $[0, \infty)$. Тъй като функцията е строго растяща, тя е обратима и нейната обратна е $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Наистина, функцията $\sqrt{x}$ е дефинирана в интервала $[0, \infty)$ (областта от стойности на x^2 е същият интервал) и $f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ и $f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$.

Пример: Експоненциалната функция и натуралният логаритъм са взаимно обратни функции. Наистина, дефиниционната област на функцията e^x и областта от стойности на $\ln(x)$ е интервалът $(-\infty, \infty)$, а дефиниционната област на функцията $\ln(x)$ и областта от стойности на e^x е интервалът $(0, \infty)$. Освен това $f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$ и $f(f^{-1}(x)) = e^{\ln(x)} = x$.

Тригонометричните функции $y = \sin\ x$, $y = \cos\ x$, $y = \operatorname{tg}\ x$, $y = \operatorname{cotg}\ x$, разгледани в подходящи интервали, в които те са или строго растящи или строго намаляващи, имат обратни функции, които се наричат съответно **аркус синус, аркус косинус, аркус тангенс и аркус котангенс.**

Обратните кръгови функции също са основни елементарни функции. Основните сведения за тях са дадени в следващата таблица.

Обратни кръгови функции

функция	обратна функция
$y = \sin\ x$	$y = \arcsin\ x$
$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $y \in [-1, 1]$ строго растяща	$x \in [-1, 1]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ строго растяща
$y = \cos\ x$	$y = \arccos\ x$
$x \in [0, \pi]$ $y \in [-1, 1]$ строго намаляваща	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$ строго намаляваща

Обратни кръгови функции

функция	обратна функция
$y = \operatorname{tg}\, x$	$y = \operatorname{arctg}\, x$
$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $y \in (-\infty, +\infty)$ строго растяща	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ строго растяща
$y = \operatorname{cotg}\, x$	$y = \operatorname{arcctg}\, x$
$x \in (0, \pi)$ $y \in (-\infty, +\infty)$ строго намаляваща	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$ строго намаляваща

Дефиниция 8.8 *Ако $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, то функцията $F(x) = f(\varphi(x))$ се нарича* ***съставна функция, сложна функция*** *или* ***функция от функция****.*

Дефиниция 8.9 ***Елементарни функции*** *ще наричаме функциите, които се получават от основните елементарни функции и операциите събиране, изваждане, умножение, деление и функция от функция.*

Алгебричните функции включват в себе се рационалните и ирационалните функции. Функциите, които не са алгебрични се наричат **трансцендентни**.

ЗАДАЧИ

8.17 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 2|x| - 10}}$.

Решение: Знаменателят не може да бъде нула, а изразът под корена трябва да бъде неотрицателен. Следователно функцията е дефинирана, когато

$$3x - 2|x| - 10 > 0.$$

Решаваме това неравенство. Тъй като в израза участва $|x|$, ще разгледаме два случая.
1. Ако $x \in (-\infty, 0)$, то $|x| = -x$ и получаваме неравенство

$$5x - 10 > 0, \quad \text{т.е.} \quad x \in (2, +\infty).$$

Но $x < 0$ и следователно в този случай неравенството няма решение.

2. Ако $x \in [0, +\infty)$, то $|x| = x$ и получаваме неравенството $x - 10 > 0$, т.е $x \in (10, +\infty)$.

Обединяваме резултатите от двата случая и получаваме, че дефиниционната област на функцията е интервала $(10, +\infty)$.

8.18 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \ln(5 - 2x)$.

Решение: Логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Следователно дефиниционната област се определя от условието $5 - 2x > 0$, т.е. $x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$.

8.19 Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \cos\left(\ln\dfrac{x+2}{x-1}\right)$.

Решение: Функцията косинус е дефинирана за всяка реална стойност на аргумента, а логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Следователно дефиниционната област се определя от условието

$$\frac{x+2}{x-1} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+2)(x-1) > 0.$$

Решаваме последното квадратно неравенство и получаваме, че дефиниционната област на функцията е $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

8.20 Да се определи дали е четна или нечетна функцията $y = \sin\, 2x - x\cos\, x$.

Решение: Имаме:

$$y(-x) = \sin\,(-2x) - (-x)\cos\,(-x) = -\sin\, 2x + x\cos\, x =$$

$$= -(\sin\, 2x - x\cos\, x) = -y(x).$$

Следователно функцията е нечетна.

8.21 Да се установи дали е четна или нечетна функцията $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Решение: Имаме:

$$y(-x) = \ln\left(\sqrt{1+(-x)^2} - x\right) = \ln\frac{\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)}{\sqrt{1+x^2} + x} =$$

$$= \ln\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -y(x).$$

Следователно функцията е нечетна.

8.22 Да се установи дали е четна или нечетна функцията $y = e^{x-x^2}$.

Решение: $y(-x) = e^{-x-x^2}$.

Ако функцията е четна, то трябва за всяко x да бъде изпълнено

$$e^{x-x^2} = e^{-x-x^2} \quad , \quad \text{т.е.} \quad e^x = e^{-x},$$

което очевидно не е вярно.

Ако функцията е нечетна, то трябва за всяко x да бъде изпълнено

$$e^{-x-x^2} = -e^{x-x^2} \quad , \quad \text{т.е.} \quad e^{-x} = -e^{x},$$

което също не е вярно.

Следователно функцията не е нито четна, нито нечетна.

8.23 Да се определи периодът на функцията $y(x) = \sin\dfrac{x}{2}$.

Решение: Функцията $\sin x$ е периодична с период 2π.

Ако

$$\sin\frac{x+T}{2} = \sin\frac{x}{2}, \quad \text{то} \quad \frac{x+T}{2} - \frac{x}{2} = 2\pi, \quad \text{т.е.} \quad T = 4\pi.$$

III. Граница на функция. Непрекъснатост

Нека функцията $y = f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, като в самата точка може и да не е дефинирана.

Дефиниция 8.10 ***(Коши)*** *Числото A се нарича* ***граница на функцията*** *$f(x)$ при x, клонящо към x_0, ако за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число $\delta > 0$, че за всяко x, за което $0 < |x - x_0| < \delta$ да бъде изпълнено*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означаваме по следния начин:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Основното в горната дефиниция е, че всеки избор на $\varepsilon > 0$ определя такова число $\delta > 0$, че когато $x \neq x_0$ и принадлежи на δ-околност на точката x_0, стойностите на функцията принадлежат на ε-околност на числото A.

Дефиниция 8.11 ***(Хайне)*** *Числото A се нарича* ***граница на функцията*** *$f(x)$ при $x \to x_0$, ако при всеки избор на числова редица $\{x_n\} \to x_0$ съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\} \to A$.*

Може да се докаже, че дефинициите на Хайне и Коши са еквивалентни.

Ако x клони към x_0 със стойности по-малки от x_0, то границата се нарича **лява,** а ако x клони към x_0 със стойности по-големи от x_0, границата се нарича **дясна.**

Левите и десни граници ще означаваме съответно с:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Равенството $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$ е еквивалентно с $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервал от вида $(a, +\infty)$.

Дефиниция 8.12 *Казваме, че A е граница на функцията $f(x)$, когато x клони към $+\infty$, ако при всеки избор на $\varepsilon > 0$ може да се намери такова число K, че за всяко $x > K$ да бъде изпълнено неравенството*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Записваме по следния начин:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

Аналогични дефиниции се дават и за границите

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{ и др.}$$

Теорема 8.7 *Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогава в околност на точката x_0 функцията $f(x)$ е ограничена .*

Доказателство: От дефиницията на Коши следва

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 : \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad x \neq x_0 \quad \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Ако $\varepsilon = 1$, получаваме $f(x) < A + 1 = M$, т.е. функцията е ограничена в съответната δ-околност на точката x_0. ■

Теорема 8.8 *Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ и $f(x) \leq g(x)$ в околност на x_0. Тогава $A \leq B$.*

Доказателство: Прилагаме дефиницията на Хайне. Нека $\{x_n\} \to x_0$. Тогава за достатъчно големи n точките x_n ще принадлежат на разглежданата околност на точката x_0 и за тях ще бъде изпълнено $f(x_n) \leq g(x_n)$. Прилагаме Теорема 8.2 и получаваме $A \leq B$. ■

Теорема 8.9 *Нека $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ и $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ в околност на x_0. Тогава $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.*

Доказателство: Отново прилагаме дефиницията на Хайне. Нека $\{x_n\} \to x_0$. Тогава за достатъчно големи n точките x_n ще принадлежат на дадената околност на точката x_0 и за тях ще бъде изпълнено $f(x_n) \leq \varphi(x_n) \leq g(x_n)$. Сега прилагаме Теорема 8.3 и получаваме $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$. ■

Теорема 8.10 *Ако*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$

то:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x) \pm g(x)\,] = A \pm B,$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, \alpha f(x)\,] = \alpha A,$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} [\, f(x).g(x)\,] = A.B,$

4. *Ако* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ *и* $g(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Верността на тези твърдения следва от дефиницията на Хайне и Теорема 8.4. ■

Дефиниция 8.13 *Казваме, че функцията* $f(x)$ *е безкрайно малка при* $x \to x_0$, *ако* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Теорема 8.11 *Произведението на безкрайно малка функция и ограничена функция е безкрайно малка функция.*

Пример: $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\sin\dfrac{x^3-2}{x^2+1} = 0$, защото функцията $\sin\dfrac{x^3-2}{x^2+1}$ е ограничена, а функцията $x-1$ е безкрайно малка при $x \to 1$.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\, x}{x} = 0$, защото функцията $\sin\, x$ е ограничена, а функцията $\dfrac{1}{x}$ е безкрайно малка при $x \to \infty$.

Някои основни граници

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 \quad (a>0)$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\, x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \cos\, x = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\, x}{x} = 1$

В първи раздел Неперовото число дефинирахме като границата на редицата с общ член $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Сега ще докажем, че

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

<u>*1 случай*:</u> $x \to +\infty$.

Тогава

$$n \le x \le n+1$$

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$$

$$1+\frac{1}{n+1} \le 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Но

$$\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\lim\frac{n+1}{n+2} = e$$

и

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\lim\frac{n+1}{n} = e.$$

От Теорема 1.10 следва, че

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

<u>*2 случай*</u> $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$$

Полагаме $x+1=-t$. Тогава $t\to+\infty$ и $x=-(t+1)$. Следователно

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

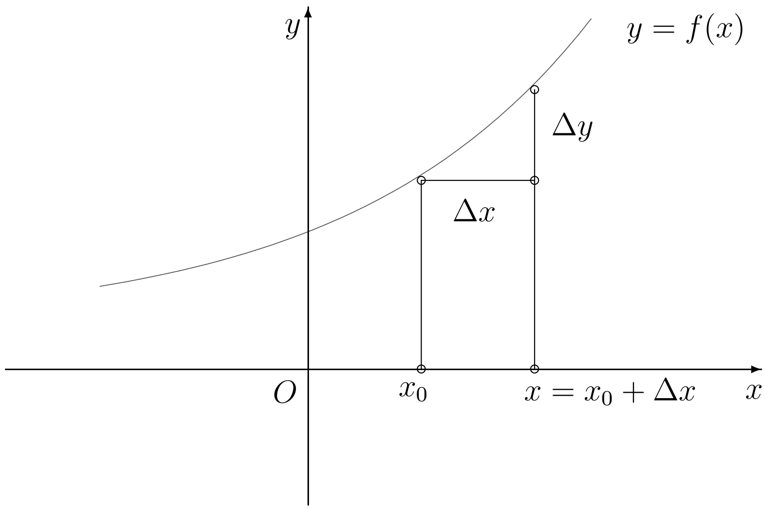
$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t.\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e$$

■

Нека x_0 и x са точки от дефиниционната област на функцията $y=f(x)$. Разликата $\Delta x = x - x_0$, която може да бъде положително или отрицателно число, наричаме нарастване на аргумента, а

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

наричаме нарастване на функцията в точката x_0, съответстващо на Δx.



Дефиниция 8.14 *Казваме, че функцията $y = f(x)$ е* ***непрекъсната*** *в точката x_0, когато на безкрайно малко нарастване на аргумента отговаря безкрайно малко нарастване на функцията, т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{8.1}$$

Очевидно е, че $\Delta x \to 0 \iff x \to x_0$ и равенството (1.1) можем да запишем по следния начин:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0.$$

Следователно от дефиниция (8.13) получаваме

Дефиниция 8.15 *Казваме, че функцията $y = f(x)$ е* ***непрекъсната*** *в точката x_0, ако тя има граница при $x \to x_0$ и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{8.2}$$

Ако в горната дефиниция оставим x да клони към x_0 със стойности по-големи (по-малки) от x_0, получаваме дефиниция за непрекъснатост на функция **отдясно (отляво).** Чрез тези дефиниции равенство (8.2) добива вида

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x). \tag{8.3}$$

Точките, в които равенството (8.3) е нарушено, се наричат **точки на прекъсване.**

Ако функцията $f(x)$ е такава, че $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ съществуват, но равенството (8.3) не е изпълнено, то очевидно функцията не е непрекъсната в точката x_0. Точката x_0 в този случай се нарича **точка на прекъсване от първи род**.

Точка на прекъсване от първи род, за която $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ се нарича **отстранима точка на прекъсване**.

Ако функцията $f(x)$ е такава, че $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не съществуват или някоя от тези граници е безкрайност, точката x_0 в този случай се нарича **точка на прекъсване от втори род**.

Теорема 8.12 *Ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати в дадена точка x_0, то и функциите $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x).g(x)$, а в случая когато $g(x_0) \neq 0$, и функцията $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ са непрекъснати в тази точка.*

Теорема 8.13 *Нека функцията $y = f(u)$ е непрекъсната в точката u_0, функцията $u = \varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогава сложната функция $F(x) = f(\varphi(x))$ е непрекъсната в точката x_0, т.е. непрекъсната функция от непрекъсната функция е също непрекъсната функция.*

Доказателство: От това, че функцията $\varphi(x)$ е непрекъсната в точката x_0 следва, че $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т.е. когато $x \to x_0$, то $u \to u_0$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)) = F(x_0)$$

■

Следващата теорема показва, че ако една функция е непрекъсната в точката x_0, то в околност на тази точка тя запазва своя знак.

Теорема 8.14 *Нека $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Тогава:*
1. Ако $f(x_0) > 0$, то съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, че $f(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
2. Ако $f(x_0) < 0$, то съществува такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, че $f(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично. От дефиницията на Коши имаме

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \text{такова че} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \text{е изпълнено}$$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Нека изберем $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. Тогава за всяко x от съответната на този избор на ε околност ще бъде изпълнено

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

■

Теорема 8.15 *Основните елементарни функции са непрекъснати във всяка точка от техните дефиниционни области.*

Една функция се нарича непрекъсната в даден интервал, ако е непрекъсната във всяка точка от този интервал. Следващите три теореми отразяват важни свойства на функциите, които са непрекъснати в краен и затворен интервал.

Теорема 8.16 *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена в този интервал.*

Теорема 8.17 *(**Теорема на Вайерщрас**) Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя притежава най-голяма и най-малка стойност в този интервал, т.е. съществуват такива точки $\alpha, \beta \in [a, b]$, че $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ за всяко $x \in [a, b]$.*

Теорема 8.18 *(**Теорема на Болцано**) Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$ и ако $f(a) \neq f(b)$, а λ е число между $f(a)$ и $f(b)$, то съществува поне една точка c в интервала (a, b), за която $f(c) = \lambda$.*

ЗАДАЧИ

8.24 Да се намери

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2x - 1}.$$

Решение:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)}{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} 2x = \infty$$

8.25 Да се намери

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 3}{x^4 - x^2 + 2x - 1}.$$

Решение:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 3}{x^4 - x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{x\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

8.26 Да се намери

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}$$

8.27 Да се намери

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{4}{3}$$

8.28 Да се намери

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

8.29 Да се намери

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+x+x^2}{x(1+\sqrt{1-x-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{x(1+\sqrt{1-x-x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{1+\sqrt{1-x-x^2}}=\frac{1}{2}$$

8.30 Да се намери

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\cos x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1,$$

защото

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

8.31 Да се намери

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x+3}).$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x+3}) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-2x+3})(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+3})}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4x-4}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

8.32 Да се намери

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x.\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x.\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x.4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x.\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

8.33 Да се намери

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x\sin x}-\cos 2x}{\sin^2 x}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x\sin x}-\cos 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2x\sin x-\cos^2 2x}{\sin^2 x(\sqrt{1+2x\sin x}+\cos 2x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x\cos^2 x+2x\sin x}{2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}2\cos^2 x+\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 2+1 = 3.$$

8.34 Да се дефинира функцията $y = \dfrac{x^4-16}{x-2}$ в точката $x = 2$ така, че получената функция да бъде непрекъсната.

Решение: Функцията не е дефинирана при $x = 2$. Да намерим границата

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2)(x^2+4) = 32.$$

Ако дефинираме една нова функция $f(x)$ по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x-2}, & x \neq 2 \\ 32, & x = 2 \end{cases},$$

то тази функция е непрекъсната за всяко x.

Задачи за самостоятелна работа:

Да се намерят границите на функциите:

8.35 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+3x-5}{x^2+3x^4-x+1}$ Отг. $\dfrac{5}{3}$

8.36 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+8x-1}{3x^4+5x^3-x+1}$ Отг. 0

8.37 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-2x^3+7x^2-2x+1}{2x^4+11x^3-x^2+1}$ Отг. $+\infty$

8.38 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^5-3x^4+7x^2-5x+1}{2x^4+5x^3-x^2-3x+3}$ Отг. $-\infty$

8.39 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-5x^3-7x^5-2x+15}{x^4+x^3-3x^2-2x+1}$ Отг. $+\infty$

8.40 $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ Отг. $\dfrac{1}{6}$

8.41 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

8.42 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})$ Отг. 0

8.43 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 10x}{\operatorname{tg} 2x}$ Отг. 5

8.44 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ Отг. 2

8.45 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$ Отг. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

8.46 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$ Отг. $-\dfrac{1}{12}$

Упътване: Използвайте формулата $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

8.47 $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-1}{x^2}$ Отг. $-\infty$

8.48 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-1}{x^2}$ Отг. $-\infty$

8.49 $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ Отг. $-\infty$

8.50 $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ Отг. $+\infty$

8.51 $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(x^2-5x+6)$ Отг. $-\infty$

8.52 $\lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x^2-5x+6)$ Отг. $-\infty$

8.53 Да се изследва за непрекъснатост функцията $y=\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$.

Отг. $x=2$ - отстранима точка на прекъсване.

8.54 Да се изследва за непрекъснатост функцията

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

Отг. $x=0$ - отстранима точка на прекъсване.

Глава 9

Производна на функция

Основни дефиниции и формули

Преди да дефинираме понятието производна на функция, ще покажем, че условието $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ е еквивалентно с $f(x) = A + \varepsilon(x)$, където $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, т.е. в сила е следната

Лема 9.1:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow f(x) = A + \varepsilon(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

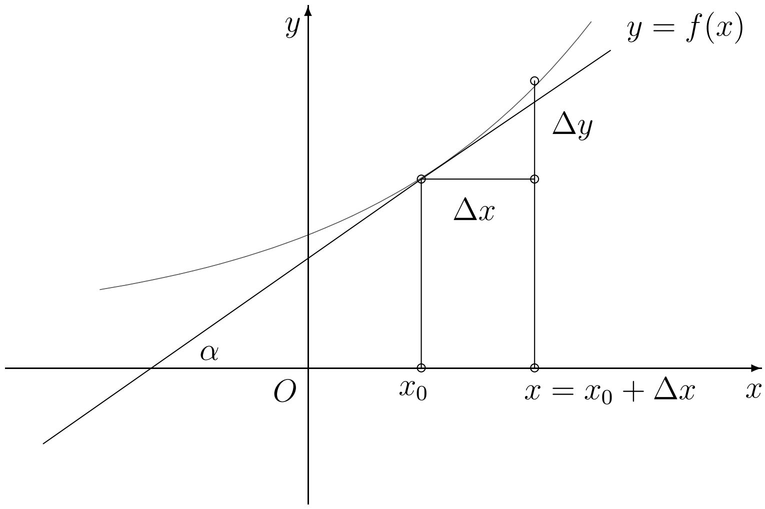
Доказателство: 1. " $\Longleftarrow$ " Нека $f(x) = A + \varepsilon(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Тогава

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (A + \varepsilon(x)) = A + \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = A + 0 = A$$

2. " $\Longrightarrow$ " Нека сега $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогава от дефиницията на Коши имаме

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \delta > 0,\ \text{такова че когато } |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Означаваме $\varepsilon(x) = f(x) - A$. Следователно $|\varepsilon(x)| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ и $f(x) = A + \varepsilon(x)$. ∎



Дефиниция 9.1 *Нека функцията $y = y(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0, включително и в самата точка x_0. Образуваме отношението (т.н.* ***диференциално отношение****)*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Границата на това отношение при $\Delta x \to 0$ (ако съществува) се нарича ***производна*** *на функцията $y(x)$ в точката x_0. Означаваме я с $y'(x_0)$, т.е.*

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Функция, която има производна в дадена точка, се нарича **диференцируема.**

За функцията $y(x) = x^2$, например, във всяка точка x имаме

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Ако $\Delta x \to 0$ с отрицателни стойности, производната се нарича **лява**, а ако $\Delta x \to 0$ с положителни стойности, производната се нарича **дясна**, т.е.

$$y'_{\text{л}}(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

$$y'_{\text{д}}(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

Очевидно е, че една функция е диференцируема в точката x_0, ако

$$y'_{\text{л}}(x_0) = y'_{\text{д}}(x_0) = y'(x_0)$$

Отношението $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$ е равно на тангенса на ъгъла, който секущата през точките с координати $(x, y(x))$ и $(x_0, y(x_0))$ сключва с положителната посока на абсцисната ос. Когато $\Delta x \to 0$, т.е. $x \to x_0$, секущата става допирателна (тангента) към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0))$. Следователно **геометричното значение на производната** на функцията в точката x_0 е, че тя е равна на тангенса на ъгъла α, който тангентата към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0))$ сключва с положителната посока на оста x, т.е.

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

Следователно уравнението на допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, y(x_0) = y_0)$ е

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Правата, която минава през същата точка и е перпендикулярна на тангентата, се нарича нормала. Както знаем от ВМ, Част I, произведението от ъгловите коефициенти на две перпендикулярни прави е равно на -1. Следователно уравнението на нормалата е

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

Нека функцията $s = s(t)$ изразява пътя, който дадена точка изминава в зависимост от времето t. Средната скорост в интервала $[t, t + \Delta t]$ е

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

а

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t)$$

е **скоростта на точката** в момента t.

Нека $Q = Q(t)$ е количеството електричество, което преминава през сечението на проводник за време t. Средната сила на тока в интервала $[t, t + \Delta t]$ е

$$Q_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t},$$

а

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} Q_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = Q'(t)$$

е **силата на тока** в момента t.

Теорема 9.1 *Ако функцията $y = y(x)$ има производна в точката x, то тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство: От
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$$
и Лема 9.1 следва
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)+\varepsilon(\Delta x)\qquad \text{и}\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$$
$$\Delta y=y'(x)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x\qquad \text{и}\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$$
Следователно
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}y'(x).\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x).\Delta x=y'(x).0+0=0$$
■

Нека $y=F(x)$, $u=u(x)$ и $v=v(x)$ са диференцируеми функции, а C е константа.

Основни правила за диференциране

1. $(C.u)'=C.u'$

2. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

3. $(u.v)'=u'.v+u.v'$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-u.v'}{v^2}$

5. $[F(u(x))]'=F'_u.u'_x=F'(u(x)).u'(x)$

6. Ако $x=g(y)$ е обратната функция на $y=f(x)$ и $f'(x)\neq 0$, то
$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

Производни на основните елементарни функции

1. $c' = 0, \quad x' = 1$

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

3. $(a^x)' = a^x . \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Ще докажем някои от горните формули.

Нека $y = \ln x$. Тогава

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x},$$

защото $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

За логаритмичната функция при произволна основа $y = \log_a x$ имаме $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ и получаваме $y' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Функцията $y = a^x$ е обратна функция на $x = \log_a y$. Използваме формулата за производна на обратна функция и получаваме

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a.$$

При $a = e$ следва, че $(e^x)' = e^x$.

Нека $y = \sin x$.
Тогава

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \dfrac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} . \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x,$$

защото $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ и функцията $\cos x$ е непрекъсната.

За $y = \operatorname{tg} x$ имаме:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{и} \quad y' = \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Нека $y = \arcsin x$. Обратната функция на $y = \arcsin x$ е $x = \sin y$. Използваме формулата за производна на обратна функция и получаваме

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

защото $\sin^2 y = (\sin(\arcsin x))^2 = x^2$.

Функцията $y = \operatorname{arctg} x$ е обратна функция на $x = \operatorname{tg} y$, следователно

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

защото $\operatorname{tg}^2 y = (\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2 = x^2$.

Нека $y = x^\alpha$ $(x > 0,\ \alpha \in R)$. Тогава имаме $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Прилагаме формулата за производна на сложна функция и получаваме

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} . (\alpha \ln x)' = x^\alpha . \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

ЗАДАЧИ

9.1 Да се докаже, че функцията $f(x) = |x|$ няма производна в точката $x_0 = 0$.

Решение:
Образуваме диференциалното отношение

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Ако $\Delta x > 0$, то $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$, но ако $\Delta x < 0$, то $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$.

Това означава, че $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ няма граница при $\Delta x \to 0$,

т.е. $f(x) = |x|$ няма производна в разглежданата точка.

9.2 Да се намери производната на функцията

$$y = 4x^5 + 2x^2 - \sqrt{x} + \ln x$$

Решение:

$$y' = 20x^4 + 4x - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{x} = 20x^4 + 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

9.3 Да се намери производната на функцията

$$y = 3e^x + 2\sin x - 5\ \mathrm{tg}\, x + \frac{5}{x^2} - 3$$

Решение:

$$y' = 3e^x + 2\cos x - \frac{5}{\cos^2 x} + 5(x^{-2})' = 3e^x + 2\cos x - \frac{5}{\cos^2 x} - \frac{10}{x^3}$$

9.4 Да се намери производната на функцията

$$y = (x^5 - 3x^3)\cos x$$

Решение:

$$y' = (x^5 - 3x^3)'\cos x + (x^5 - 3x^3)(\cos x)' = (5x^4 - 9x^2)\cos x - (x^5 - 3x^3)\sin x$$

9.5 Да се намери производната на функцията

$$y = \frac{x^7 - 2x^3}{x - 1}$$

Решение:

$$y' = \frac{(x^7 - 2x^3)'(x-1) - (x^7 - 2x^3)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(7x^6 - 6x^2)(x-1) - (x^7 - 2x^3)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{6x^7 - 7x^6 - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(6x^5 - 7x^4 - 4x + 6)}{(x-1)^2}$$

В разгледаните до момента примери не беше използвана формула (5), известна като формула за намиране производната на сложна функция. Прилагането на тази формула изисква първо на функцията $u(x)$ да гледаме като на аргумент u и след като намерим производната на $F(u)$, да я умножим с производната на $u(x)$.

9.6 Да се намери производната на функцията $y = e^{3x^2}$.

Решение: Да означим $u(x) = 3x^2$. Тогава $y = F(u) = e^u$ и

$$y' = e^u.u' = e^u.(3x^2)' = 6x.e^{3x^2}$$

9.7 Да се намери производната на функцията $y = \ln(x^3 + 2x^2 + 1)$

Решение: Да означим $u(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Тогава $y = F(u) = \ln u$, т.е. y е сложна функция.

Чрез формулата за производна на сложна функция получаваме

$$y' = F'(u(x)).u'(x) = \frac{1}{u} \cdot (x^3 + 2x^2 + 1)' = \frac{1}{u} \cdot (3x^2 + 4x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^3 + 2x^2 + 1}$$

9.8 Да се намери производната на функцията

$$y = \ln(\sin x)$$

Решение: Да означим $u(x) = \sin x$ и $F(u) = \ln u$.

Имаме $y = F(u(x))$, т.е. y е сложна функция.

Чрез формулата за производна на сложна функция получаваме

$$y' = F'(u(x)).u'(x) = \frac{1}{u} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

9.9 Да се намери производната на функцията

$$y = \sin(x^2 + 2x - 1)$$

Решение: Отново става дума за сложна функция.

Следователно

$$y' = \cos(x^2+2x-1).(x^2+2x-1)' = (2x+2)\cos(x^2+2x-1).$$

9.10 Да се намери производната на функцията

$$y = \ln(x+\sqrt{x^2+7})$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+7}} \cdot (x+\sqrt{x^2+7})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+7}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+7}}$$

9.11 Да се намери производната на функцията

$$y = \arcsin\frac{1}{x}$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{|x|.\sqrt{x^2-1}}$$

9.12 Да се намери производната на функцията

$$y = e^{3x}\sin 2x$$

Решение:

$$y' = \left(e^{3x}\right)'\sin 2x + e^{3x}(\sin 2x)' = 3e^{3x}\sin 2x + 2e^{3x}\cos 2x = e^{3x}(3\sin 2x + 2\cos 2x)$$

9.13 Да се намери производната на функцията

$$y = 3^{\operatorname{arctg} x^3}$$

Решение:

$$y' = 3^{\operatorname{arctg} x^3}.\ln 3.(\operatorname{arctg} x^3)' = 3^{\operatorname{arctg} x^3}\cdot\ln 3\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}$$

Производната на функция от вида $y = u(x)^{v(x)}$ се намира посредством **предварително логаритмуване**. Ще го демонстрираме със следващите два примера:

9.14 Да се намери производната на функцията

$$y = x^x$$

Решение: Логаритмуваме функциите от двете страни на равенството и получаваме

$$\ln y = x.\ln x$$

Диференцираме горното равенство относно x и получаваме:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

От тук

$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

9.15 Да се намери производната на функцията

$$y = x^{\operatorname{arctg} x}$$

Решение: Логаритмуваме функциите от двете страни на равенството и получаваме

$$\ln y = \operatorname{arctg} x.\ln x$$

Диференцираме горното равенство относно x и получаваме

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} x$$

От тук

$$y' = x^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)$$

Производни от по-висок ред

Нека функцията $y(x)$ има производна $y'(x)$ във всяка точка от интервала (a, b). Тази производна е отново функция на x и може в интервала (a, b) да има своя производна, която се нарича втора производна (производна от втори ред) на $y(x)$. Означаваме я с $y''(x)$ или $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

Изобщо, първата производна на производната от ред $(n-1)$ се нарича n-та производна. Записваме

$$y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'$$

9.16 Намерете n-тата производна на функцията $y = \sin x$.
Решение: Пресмятаме

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

Очевидно за производната от n-ти ред имаме

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

9.17 Намерете n-тата производна на функцията $y = \cos x$.

Отг. $y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

9.18 Намерете $y^{(n)}$ на функцията $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение: Последователно получаваме

$$y' = -\frac{1}{x^2}; \quad y'' = \frac{2}{x^3}; \quad y''' = \frac{-2.3}{x^4}; \quad y^{IV} = \frac{2.3.4}{x^5}$$

Това е достатъчно за да направим предположение, че

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$$

Тази формула лесно се доказва по индукция.

Диференциал на функция

Нека функцията $y = y(x)$ има производна в точката x_0. От Лема 9.1 следва, че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$$

Следователно

$$\Delta y = \ y'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x).\Delta x$$

Първото събираемо $y'(x_0)\Delta x$ се нарича **диференциал** на функцията $y(x)$ в точката x_0 и се означава с $\mathrm{d}y$.

Диференциалът $\mathrm{d}x$ на независимата променлива x е равен на нарастването Δx. Следователно

$$\mathrm{d}y = y'(x)\ \mathrm{d}x, \qquad \text{а} \qquad y'(x) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

От чертежа на страница 100 се вижда, че диференциалът е равен на частта от нарастването на функцията, която е под допирателната.

9.19 Да се намери диференциалът на функцията $y(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

Решение:

$$y'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{3}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Основни теореми на диференциалното смятане

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в околност на точката x_0.

Дефиниция 9.2 *Функцията $f(x)$ има* ***локален максимум*** *(**локален минимум**) в точката x_0, ако съществува околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, за всяка точка от която е изпълнено $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x_0) \le f(x))$.*

Точките на локални минимуми и локални максимуми се наричат точки на **локални екстремуми.**

Теорема 9.2 *(**Теорема на Ферма**)Ако функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и има локален екстремум в тази точка, то $f'(x_0)=0$.*

Доказателство: Да приемем, че функцията има локален максимум в точката x_0.

Ако $x = x_0 + \Delta x$ е произволна точка от околността $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, за нарастването на функцията имаме

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0.$$

Да разгледаме лявата и дясната производни в точката x_0. Имаме съответно:

$$f'_{\text{Л}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0, \qquad \text{защото} \quad \Delta x < 0$$

$$f'_{\text{Д}}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} \le 0, \qquad \text{защото} \quad \Delta x > 0$$

Но функцията $f(x)$ е диференцируема в точката x_0 и това означава, че лявата производна трябва да е равна на дясната производна. Това е възможно само ако те са равни на нула, т. е. $f'(x_0) = 0$. ■

Теорема 9.3 *(**Теорема на Рол**) Нека функцията $f(x)$ е:*

- непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$,

- диференцируема в отворения интервал (a,b),

- $f(a) = f(b)$.

Тогава съществува такава точка $c \in (a,b)$, че $f'(c) = 0$.

Доказателство: От условието на теоремата следва, че е в сила теоремата на Вайерщрас, т.е. функцията достига най-голямата и най-малката си стойности. Ако тези стойности се достигат в краищата на интервала $[a,b]$, то от $f(a) = f(b)$ следва, че функцията е константа, а производната на константа е нула във всяка точка на интервала $[a,b]$. Ако поне една от тези стойности се достига в точка $c \in (a,b)$, то това е точка на локален екстремум за функцията и следователно за нея е в сила теоремата на Ферма, т.е. $f'(c) = 0$, с което теоремата е доказана. ■

Теорема 9.4 *(**Теорема на Коши**) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са:*

- непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$,

- диференцируеми в отворения интервал (a, b),

- $g'(x) \neq 0$ в интервала (a, b).

Тогава съществува такава точка $c \in (a, b)$, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказателство: Да разгледаме функцията

$$F(x) = [f(x) - f(a)] - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

За тази функция е в сила теоремата на Рол, защото тя е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, диференцируема в отворения интервал (a, b) и $F(a) = F(b) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$$

Съгласно теоремата на Рол съществува точка $c \in (a, b)$, такава че

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

■

Теорема 9.5 *(**Теорема на Лагранж**) Нека функцията $f(x)$ е:*

- непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$,

- диференцируема в отворения интервал (a, b).

Тогава съществува такава точка $c \in (a, b)$, че

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Доказателство: Прилагаме теоремата на Коши при $g(x) = x$. Имаме $g(b) = b$, $g(a) = a$ и $g'(x) = 1$. Следователно

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

■

Теорема 9.6 *(Основна теорема на интегралното смятане) Ако $f'(x) = 0$ в интервала (a, b), то функцията е константа в този интервал.*

Доказателство: Да фиксираме точката $x_0 \in (a, b)$ и нека $x \in (a, b)$ е произволна точка. Прилагаме теоремата на Лагранж за точките x_0 и x и получаваме:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0.(x - x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x_0),$$

а това означава, че $f(x)$ е константа. ∎

Неопределени форми. Теореми на Лопитал

Както вече добре знаем, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$. Ако $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, тогава $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Ако обаче $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и търсим $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ казваме,че имаме **неопределеност от вида** $\dfrac{0}{0}$.

Ако $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty$, тогава $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Когато обаче $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ и търсим $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, имаме **неопределеност от вида** $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Тези две неопределености ще наричаме **основни неопределени форми**. За тях са в сила следните теореми:

Теорема 9.7 *(Правило на Лопитал)Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката x_0, с евентуално изключение на самата точка x_0, $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ в тази околност и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Тогава, ако съществува $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и е изпълнено равенството

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказателство: Дефинираме двете функции в точката x_0, като $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Сега за интервала $[x_0, x]$ можем да приложим теоремата на Коши:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad c \in (x_0, x)$$

т.е.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad c \in (x_0, x)$$

Когато $x \to x_0$, то и $c \to x_0$ и от съществуването на $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ получаваме

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

■

Теорема 9.8 (***Правило на Лопитал***) *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани и диференцируеми в околност на точката x_0, с евентуално изключение на самата точка x_0, $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$ в тази околност и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Тогава, ако съществува $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и е изпълнено равенството

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Теоремите остават в сила и когато $x \to \infty$. Наистина, ако положим $x = \dfrac{1}{t}$, тогава $t \to 0$.

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

В теоремите се твърди, че от съществуването на $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ следва съществуването на $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Обратното не е вярно, т.е. може $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ да съществува, а $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ да не съществува. С други думи, от това че $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не съществува, не можем да правим изводи за $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Ако след прилагането на теоремите на Лопитал получим пак неопределеност, то очевидно е че пак можем да ги приложим, т.е теоремите могат да се прилагат няколко пъти последователно.

Дефиницията на неопределените форми от вида $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ е очевидна. Първите две, $0.\infty$ и $\infty - \infty$, се свеждат към основните чрез алгебрични преобразования.

• Когато търсим граница от вида $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ и $f(x)\to 0$, а $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, имаме неопределеност от вида $0.\infty$. Тази неопределеност може да се сведе до $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ по следния начин: Ако преобразуваме

$$f(x).g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}, \qquad \text{получаваме първата основна неопределеност } \frac{0}{0},$$

а преобразувайки

$$f(x).g(x) = \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}, \qquad \text{получаваме втората основна неопределеност } \frac{\infty}{\infty}.$$

• Неопределеност $\infty - \infty$ имаме, когато търсим граница от вида $\lim_{x\to x_0}(f(x) - g(x))$ и $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. За решаване на тази неопределеност преобразуваме по следния начин:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

Ако $\lim_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, то имаме неопределеност от вида $0\cdot\infty$.

Ако $\lim_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, тогава $\lim_{x\to x_0} f(x)\left(1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right) = \infty$.

• Случаите 0^0, ∞^0 и 1^∞ се свеждат до $0.\infty$ чрез логаритмуване.

ЗАДАЧИ

9.20 Да се намери $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

Решение: Числителят и знаменателят на израза клонят към нула при $x\to 0$, т.е. имаме неопределена форма от вида $\dfrac{0}{0}$. Прилагаме правилото на Лопитал. Образуваме отношението от производните на числителя и знаменателя $\dfrac{4e^{4x}}{\dfrac{2}{1+4x^2}}$ и търсим границата му когато $x\to 0$. Имаме: $\lim_{x\to 0}\dfrac{4e^{4x}}{\dfrac{2}{1+4x^2}} = 2$. Следователно

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\operatorname{arctg} 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{4e^{4x}}{\dfrac{2}{1+4x^2}} = 2.$$

9.21 Да се намери $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение: Числителят и знаменателят на израза клонят към нула при $x \to 0$, т.е. това е неопределена форма от вида $\dfrac{0}{0}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

9.22 Да се намери $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x^3}$.

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. По правилото на Лопитал образуваме отношението $\dfrac{2(\ln x)\frac{1}{x}}{3x^2} = \dfrac{2\ln x}{3x^3}$, което отново представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Пак прилагаме правилото на Лопитал и получаваме отношението $\dfrac{2}{9x^3}$, което има граница нула при $x \to +\infty$. Следователно

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} = 0$$

Решението може да се запише накратко по следния начин:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\ln x}{3x^3} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \frac{2}{3} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$$

9.23 Да се намери $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)}$.

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{e^x}{e^x - e}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x - e}{e^x(x-1)} = \frac{1}{e} \cdot \lim_{x\to 1^+} \frac{e^x - e}{x - 1} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \frac{1}{e} \lim_{x\to 1^+} e^x = 1$$

9.24 Да се намери $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1)\ \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2}$.

Решение: Имаме $\lim\limits_{x\to 1} \sin(x-1) = 0$, а $\lim\limits_{x\to 1} \mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2} = \infty$. Затова изразът представлява неопределена форма от вида $0 \cdot \infty$. Преобразуваме до неопределеност от вида $\dfrac{0}{0}$ и прилагаме правилото на Лопитал. Получаваме:

$$\lim_{x\to 1}\sin(x-1)\ \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} \overset{[0\cdot\infty]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\cos(x-1)\sin^2\frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}$$

9.25 Да се намери $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}\right)$.

Решение: Изразът представлява форма от вида $\infty-\infty$. Преобразуваме до неопределеност от вида $\dfrac{0}{0}$ и прилагаме правилото на Лопитал. Получаваме:

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg}x-\frac{1}{x}\right) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x} = 0$$

9.26 Да се намери $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}}$

Решение: Изразът представлява неопределена форма от вида 1^∞. Нека

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}}$$

Логаритмуваме двете страни на горното равенство и получаваме

$$\ln y = \frac{1}{\sin x}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}$$

Търсим границата при $x\to 0$. Имаме:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\cos x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x\ -\cos x}{2x\cos x-x^2\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x} = 0$$

Получихме, че $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0} y = 0.$ Следователно

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{\sin x}} = 1$$

9.27 Да се намери $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 . \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$

Решение: Имаме неопределеност от вида $\dfrac{0}{0}$. По правилото на Лопитал образуваме отношението на производните

$$\frac{2x . \sin \dfrac{1}{x} - x^2 . \cos \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x^2}}{\cos x} = \frac{2x \sin \dfrac{1}{x}}{\cos x} - \frac{\cos \dfrac{1}{x}}{\cos x}$$

Първото събираемо клони към нула, но второто събираемо няма граница, защото $\cos \dfrac{1}{x}$ няма граница при $x \to 0$.

И така, отношението на производните няма граница. От това, разбира се, нищо не следва (Вж. коментара след Теорема 9.8). Границата, която търсим, може да съществува, а може и да не съществува. Трябва да потърсим друг начин за решаване на задачата. Например така:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

(Съществеността тук е, че функцията $\sin \dfrac{1}{x}$ е ограничена.)

Задачи за самостоятелна работа:

9.28 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

9.29 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x^2 + x}$ Отг. 1

9.30 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1 + x^3)}{e^{x^2}}$ Отг. 0

9.31 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ Отг. $\dfrac{1}{3}$

9.32 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ Отг. $-\dfrac{1}{2}$

9.33 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{x^2}}$ Отг. 0

9.34 $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\ln(2-x)}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}}$ Отг. 0

9.35 $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \ln(x-1)$ Отг. 0

9.36 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\ln(1-x)} \right)$ Отг. $\dfrac{1}{2}$

9.37 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \right)$ Отг. 0

9.38 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{x} \right)$ Отг. 0

9.39 $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \ln^3 x)$ Отг. $+\infty$

Глава 10

Изследване на функция

Монотонност и екстремум на функция

Дефиниция 10.1 *Функцията* $y = y(x)$ *се нарича* ***растяща*** *в интервала* (a, b)*, ако за всеки две числа* x_1 *и* x_2*, такива че* $a < x_1 < x_2 < b$*, е вярно* $y(x_1) \leq y(x_2)$*.*
Функцията $y = y(x)$ *се нарича* ***намаляваща*** *в интервала* (a, b)*, ако за всеки две числа* x_1 *и* x_2*, такива че* $a < x_1 < x_2 < b$*, е вярно* $y(x_1) \geq y(x_2)$*.*

Ако една функция е растяща (намаляваща) в даден интервал, тя се нарича **монотонна**.

Нека $y(x)$ е растяща функция. Да вземем точките x и $x + \Delta x$. Ако $\Delta x > 0$, то $x < x + \Delta x$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \geq 0$. Ако $\Delta x < 0$, то $x + \Delta x < x$ и $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \leq 0$. Следователно и в двата случая

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Вярно е и обратното: ако $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, то функцията $y(x)$ е растяща. Следователно

$$\boxed{y(x) \quad \text{е растяща в даден интервал} \iff \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0}$$

Аналогично

$$\boxed{y(x) \quad \text{е намаляваща в даден интервал} \iff \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0}$$

Теорема 10.1 *Нека функцията* $y(x)$ *е диференцируема в интервала* (a, b)*. Тогава:*

1. $y(x)$ *е растяща в този интервал* $\iff$ $y'(x) \geq 0$

2. $y(x)$ *е намаляваща в този интервал* $\iff$ $y'(x) \leq 0$

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично.

"$\Longrightarrow$" Нека $y(x)$ е растяща в интервала (a,b). Тогава $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ и

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$$

"$\Longleftarrow$" Нека $y'(x) \geq 0$ в интервала (a,b). За точките x и $x+\Delta x$, вътрешни за интервала (a,b), прилагаме теоремата на Лагранж.

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{x+\Delta x - x} = y'(c), \qquad c \in (x, x+\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(c) \geq 0$$

Следователно $y(x)$ е растяща в интервала (a,b). ■

От теорема 10.1 лесно следва верността на следващата теорема.

Теорема 10.2 *Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в някоя околност на точката x_0, включително и в самата точка x_0, и е диференцируема в тази околност, с евентуално изключение на точката x_0. Нека за точките x от същата околност $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Тогава в точката x_0 функцията има локален максимум.*

Теоремата е едно достатъчно условие за локален екстремум на функцията $f(x)$ в точката x_0. При това в самата точка x_0 функцията може да няма производна.

Следващата формула е известна като **формула на Тейлър**.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} \qquad c \in (x_0, x)$$

Формулата на Тейлър, до втората производна, можем да запишем по следния начин

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2 \qquad c \in (x_0, x)$$

Когато $x_0 = 0$, формулата на Тейлър е известна като формула на Маклорън.

Точките, в които първата производна на функцията се анулира, наричаме **стационарни точки**.

Теорема 10.3 *Нека x_0 е стационарна точка за функцията $f(x)$, а $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0. Ако $f''(x_0) < 0$, функцията има локален максимум в точката x_0. Ако $f''(x_0) > 0$, функцията има локален минимум в точката x_0.*

Доказателство: Ще докажем само първото твърдение. Второто се доказва аналогично.

От това, че $f''(x)$ е непрекъсната в точката x_0 и $f''(x_0) < 0$ следва, че съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, такава че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е изпълнено $f''(x) < 0$. (*Непрекъснатите функции в околност на точката запазват своя знак - теорема 1.15.*)

Избираме произволна точка $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и прилагаме формулата на Тейлър до втората производна.

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

защото $f'(x_0) = 0$. Тъй като $c \in (x_0, x)$, то $f''(c) < 0$, а $(x - x_0)^2 \geq 0$. Следователно

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 \leq 0,$$

т.е. в точката x_0 функцията има локален максимум. ■

Най-голяма и най-малка стойност на функция в затворен интервал

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$. Най-голямата и най-малката стойности на функцията в този интервал намираме по следния начин:

1. Намираме точките, в които функцията има локални екстремуми – нека те са $x_1, x_2, ..., x_k$.

2. Най-голямото от числата $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)$ е най-голямата стойност на функцията, а най-малкото - най-малката стойност на функцията.

ЗАДАЧИ

10.1 Да се изследва за монотонност функцията $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Решение: Функцията е дефинирана за всяко x.

$$y'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$$

Оттук се вижда, че $y'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, а при $x \in (-1, 3)$ е в сила $y'(x) \leq 0$. Това означава, че в първите два интервала функцията е растяща, а в интервала $(-1, 3)$ е намаляваща.

10.2 Да се изследва за монотонност функцията $y = x - \sin x$.

Решение: Функцията е дефинирана за всяко x. Пресмятаме $y'(x) = 1 - \cos x$. Тъй като $-1 \leq \cos x \leq +1$, то $y'(x) \geq 0$ за всяко x и следователно функцията е растяща в интервала $(-\infty, +\infty)$.

10.3 Да се изследва за монотонност функцията $y = x \ln x$.

Решение: Функцията е дефинирана при $x > 0$. Пресмятаме $y'(x) = \ln x + 1$. Решаваме неравенството $y'(x) \geq 0$, т.е. $\ln x \geq -1$ и получаваме $x \geq e^{-1}$. Аналогично $y'(x) \leq 0$ при $0 < x \leq e^{-1}$. Следователно, функцията е намаляваща в интервала $(0, e^{-1})$ и растяща в интервала $(e^{-1}, +\infty)$.

10.4 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Решение: Тъй като знаменателят не се анулира, функцията е дефинирана за всяко x. Производната е

$$y'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)^2}$$

Знаменателят е положителен и следователно знакът на производната се определя от числителя. Квадратният тричлен $x^2 + 2x - 1$ се анулира в $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ и $x_2 = -1 + \sqrt{2}$, т.е. в тези точки първата производна е равна на нула. Имаме

$$y'(x) > 0 \text{ при } x \in (x_1, x_2) \qquad \text{и} \qquad y'(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$$

От достатъчното условие за локален екстремум следва, че в точката $x_1 = -1-\sqrt{2}$ функцията има локален минимум, а в точката $x_2 = -1+\sqrt{2}$ – локален максимум. Стойностите им са

$$y(-1-\sqrt{2}) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}, \qquad y(-1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

10.5 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

Решение: Функцията е дефинирана при $x > 0$.

$$y'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Вижда се, че $y'(1) = 0$, $y'(x) < 0$ при $x < 1$, и $y'(x) > 0$ при $x > 1$. Следователно в точката $x = 1$ функцията има локален минимум. Пресмятаме $y(1) = 1$.

10.6 Да се намерят локалните екстремуми на функцията $y = \cos 2x - 2\sin x$

Решение: Функцията е дефинирана за всяко x и е периодична с период 2π. Затова ще търсим локалните екстремуми само в интервала $[0, 2\pi)$.

$$y'(x) = -2\sin 2x - 2\cos x = -2\cos x(2\sin x + 1)$$

Получихме, че $y'(x) = 0$, когато $\cos x = 0$ или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$. Решенията на тези две уравнения в интервала $[0, 2\pi)$ са

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}, \quad x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

Намираме втората производна на функцията

$$y''(x) = -4\cos 2x + 2\sin x$$

След това пресмятаме

$$y''(x_1) = 6 > 0, \qquad y''(x_2) = 2 > 0, \qquad y''(x_3) = -3 < 0, \qquad y''(x_4) = -3 < 0$$

Това означава, че в точките x_1 и x_2 функцията има локален минимум, а в точките x_3 и x_4 функцията има локален максимум. Стойностите им са:

$$y(x_1) = -3, \qquad y(x_2) = 1, \qquad y(x_3) = \frac{3}{2}, \qquad y(x_4) = \frac{3}{2}.$$

10.7 Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията $y = e^{2x} - e^{-x}$ в интервала $[-1, 2]$.

Решение: Намираме първата производна на функцията.

$$y'(x) = 2e^{2x} + e^{-x} > 0,$$

т.е. функцията е растяща и локални екстремуми няма. Следователно най-малката стойност на функцията се достига в левия край на интервала, а най-голямата в десния. Съответните стойности са:

$$y(-1) = \frac{1}{e^2} - e, \qquad y(2) = e^4 - \frac{1}{e^2}.$$

Задачи за самостоятелна работа:

10.8 Да се изследват за монотонност функциите

а) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Отг. растяща при $x \in (0, e)$
намаляваща при $x \in (e, +\infty)$

б) $y = 2x^2 - \ln x$

Отг. намаляваща при $x \in (0, 0.5)$
растяща при $x \in (0.5, +\infty)$

в) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

Отг. намаляваща при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
растяща при $x \in (0, 2)$

г) $y = \dfrac{e^x}{x}$

Отг. намаляваща при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$
растяща при $x \in (1, +\infty)$

д) $y = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

Отг. растяща при $x \in (-\infty, 0)$
намаляваща при $x \in (0, +\infty)$

10.9 Да се намерят локалните екстремуми на функциите

а) $y = x \ln x$ Отг. $y_{\min}\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

б) $y = x^2 \ln x$ Отг. $y_{\min}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

в) $y = \frac{x^2+1}{x}$ Отг. $y_{\max}(-1) = -2, \quad y_{\min}(1) = 2$

г) $y = x^3 e^{-x}$ Отг. $y_{\max}(3) = \frac{27}{e^3}$

д) $y = \frac{e^x}{x}$ Отг. $y_{\min}(1) = e$

е) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$ Отг. $y_{\min}\left(\frac{8}{27}\right) = -\frac{4}{27}, \quad y_{\max}(0) = 0$

ж) $y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} x$ Отг. $y_{\min}(1) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$

10.10 Да се намерят най-малката и най-голямата стойности на функцията в затворения интервал

а) $y = 2x^2 - x^4 + 3 \qquad x \in [-2, 2]$ Отг. $-5, \quad 4$

б) $y = x + 2\sqrt{x} \qquad x \in [0, 4]$ Отг. $0, \quad 8$

в) $y = \frac{x-1}{x+1} \qquad x \in [0, 2]$ Отг. $-1, \quad \frac{1}{3}$

Глава 11

Неопределен интеграл

Понятието неопределен интеграл е свързано с действието, което е обратно на диференцирането. Намирането на функция, чиято производна е равна на дадена функция, се нарича интегриране и методите за интегриране се оказват доста по-сложни от методите за диференциране.

Нека е дадена функцията $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в даден интервал.

Дефиниция 11.1 *Ще казваме, че функцията $F(x)$, дефинирана в същия интервал, е **примитивна функция** на $f(x)$, ако $F(x)$ е диференцируема в този интервал и $F'(x) = f(x)$.*

Теорема 11.1 *Ако $F(x)$ е примитивна на функцията $f(x)$ в един интервал, то всяка друга примитивна на $f(x)$ има вида $F(x) + C$, където C е константа.*

Доказателство: Да означим с $\Phi(x)$ произволна примитивна на $f(x)$ и да разгледаме функцията $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x)$. Тогава

$$\varphi'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

за всяко x в дадения интервал. Тогава според основната теорема на интегралното смятане функцията $\varphi(x)$ е константа в този интервал, т.е. $\varphi(x) = \Phi(x) - F(x) = C$. Следователно $\Phi(x) = F(x) + C$.

Дефиниция 11.2 *Множеството от всички примитивни функции на функцията $f(x)$ се нарича **неопределен интеграл** и се означава с*

$$\int f(x)\, dx,$$

*а функцията $f(x)$ се нарича **подинтегрална функция**, т.е.*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \qquad \text{където} \qquad F'(x) = f(x)$$

Намирането на примитивните функции на дадена функция $f(x)$ се нарича **интегриране** на $f(x)$.

11.1 $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$, защото $(e^x)' = e^x$.

11.2 $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$, защото $(\sin x)' = \cos x$.

11.3 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$, защото $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Свойства:

1. $\displaystyle\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

Доказателство: $\displaystyle\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$

2. $\displaystyle\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)$

3. $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ *a-константа*

Доказателство: $\displaystyle\left(a\int f(x)\,dx\right)' = a.\,(F(x)+C)' = a.F'(x) = a.f(x)$

4. $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\;dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Доказателство:

$$\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)' = f(x) + g(x)$$

5. Ако $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то

$$\int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C$$

Доказателство: $(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x)).\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$

ТАБЛИЧНИ ИНТЕГРАЛИ

1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0)$

3. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\cdot a^x + C$

4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

6. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C \qquad (a \neq 0)$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Доказателството на формулите следва директно, като се диференцират функциите от дясната страна на равенствата.

Формула 12 може да се получи и по следния начин:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

Следователно

$$\int\frac{1}{x^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{x-a}\,dx-\int\frac{1}{x+a}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{1}{x-a}\,d(x-a)-\int\frac{1}{x+a}\,d(x+a)\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

В следващите редове ще се запознаем с някои елементарни методи за интегриране. Под **непосредствено интегриране** ще разбираме пресмятане на неопределени интеграли чрез прилагане на основните свойства и табличните интеграли. Ще демонстрираме този метод с няколко примера.

11.4 $\int(x^4+4x^3-3x+1)\,dx=\int x^4\,dx+4\int x^3\,dx-3\int x\,dx+\int 1\,dx=$

$=\frac{x^5}{5}+4\frac{x^4}{4}-3\frac{x^2}{2}+x+C=\frac{1}{5}x^5+x^4-\frac{3}{2}x^2+x+C$

11.5 $\int\frac{x^6+5x^3\sqrt{x}-3x+2}{x^2}\,dx=\int x^4\,dx+5\int x\sqrt{x}\,dx-3\int\frac{1}{x}\,dx+2\int\frac{1}{x^2}\,dx=$

$=\frac{x^5}{5}+5\int x^{\frac{3}{2}}\,dx-3\ln|x|+2\int x^{-2}\,dx=\frac{1}{5}x^5+2x^{\frac{5}{2}}-3\ln|x|-\frac{2}{x}+C$

В следващите няколко примера ще демонстрираме прилагането на свойство 5, в случая когато $\varphi(x)=ax+b$. Тогава имаме

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\,d(ax+b)=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad a,b \text{ - } \textit{константи}$$

11.6 $\int\frac{1}{3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{3x+2}\,d3x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{3x+2}\,d(3x+2)=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$

11.7 $\int\frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,d2x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2(2x-11)}\,d(2x-$
$11)=$

$= \frac{1}{2}\ \mathrm{tg}(2x-11)+C$

11.8 $\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,dx = 4\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,d\frac{x}{4} = 4\int \sin(\frac{x}{4}-5)\,d(\frac{x}{4}-5) = -4\cos(\frac{x}{4}-5)+C$

11.9 $\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \int \cos 2x\,dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

11.10 $\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \int \cos 2x\,dx\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,d2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

11.11 $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}.a\int \frac{1}{(\frac{x}{a})^2+1}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$

11.12 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\,dx = \frac{1}{a}.a\int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\,d\frac{x}{a} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

От разгледаните примери се вижда, че имаме право да умножим променливата x след знака за диференциал с число, но трябва да компенсираме с деление пред знака за интеграл със същото число. След знака за диференциал можем да прибавяме или изваждаме числа, каквито са ни необходими, за да получим табличен интеграл.

Следващите няколко примера ще съдържат квадратни тричлени и основната операция за пресмятането им ще бъде операцията **отделяне на точен квадрат**.

11.13 $\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,d(x-2) =$
$= \mathrm{arctg}(x-2)+C$

11.14 $\int \frac{1}{x^2+6x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-4}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2-2^2}\,d(x+3) =$
$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+5}\right|+C$

11.15 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+12}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2-4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)^2-4}}\,d(x+4) =$

$= \ln|x+4+\sqrt{x^2+8x+12}|+C$

11.16 $\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2-4x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{3-(4x^2+4x+1-1)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(2x+1)^2}}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2^2-(2x+1)^2}}\,d(2x+1) = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+1}{2}+C$

Интегриране чрез внасяне под знака на диференциала

Както знаем, ако $\varphi(x)$ е диференцируема функция, то $d\varphi(x) = \varphi'(x)dx$. В такъв случай имаме

$$\int f(x)\varphi'(x)\,dx = \int f(x)\,d\varphi(x)$$

Когато прилагаме това равенство ще казваме, че внасяме функцията $\varphi'(x)$ под знака на диференциала или че извършваме действието внасяне под знака на диференциала. То се състои в това, че вместо функцията $\varphi'(x)$, която е пред диференциала, написваме под диференциала една нейна примитивна функция. Поради тази причина често казваме, че внасянето под знака на диференциала е интегриране и внасяме под знака на диференциала функции, които лесно се интегрират (например има ги в табличните интеграли). Ползата от това действие се вижда ясно при прилагане на свойство 5.

11.17 $\int \sin x\cos x\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала $\cos x$) $= \int \sin x\,d\sin x =$

$= \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

11.18 $2\int xe^{x^2}\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала x) $= \int e^{x^2}\,dx^2 = e^{x^2}+C$

11.19 $2\int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$ (внасяме под знака на диференциала x)=

$= \int \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) = \ln|x^2+1|+C$

11.20 $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\sin x\,dx = -\int \sin^2 x\,d\cos x = \int (\cos^2 x - 1)\,d\cos x =$

$= \int \cos^2 x\,d\cos x - \int 1\,d\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

11.21 $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\ln|\cos x| + C$

11.22 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,d\frac{x}{2} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\,d\frac{x}{2} =$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,d\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

11.23 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\,d\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

Интегриране чрез смяна на променливата (полагане, субституция)

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала D, а $x = \varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала D_1 и е обратима. Тогава

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt + C$$

Равенството трябва да се разбира по следния начин: лявата страна на равенството е равна на дясната, ако след интегрирането направим субституцията $x = \varphi(t)$ и изберем подходяща константа C.
Доказателство:

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right).\frac{dx}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Следователно, ако във функцията $\int f(x)\,dx$ направим полагането $x = \varphi(t)$, ще получим примитивна функция на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ е също примитивна функция на $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, а както знаем две примитивни се различават само с константа.

Интегриране чрез смяна на променливата (полагане) ще прилагаме, когато желаем да пресметнем $\int f(x)\,dx$ и можем да подберем функцията $\varphi(t)$ така, че след заместването на x с $\varphi(t)$ полученият интеграл да е по-лесен за пресмятане.

11.24 $\displaystyle I = \int \frac{1}{2+\sqrt{x+3}}\,dx$

Ако в интеграла направим субституцията $x = t^2 - 3$, $(x+3 \geq 0)$, то $\sqrt{x+3} = t$ и

$dx = 2tdt$. Тогава интегралът добива вида $\displaystyle I = \int \frac{2t}{2+t}\,dt = 2\int \frac{t+2-2}{2+t}\,dt =$

$$= 2\left(\int 1\,dt - 2\int \frac{1}{t+2}\,d(t+2)\right) = 2t - 4\ln|t+2| + C = 2\sqrt{x+3} - 4\ln(2+\sqrt{x+3}) + C$$

11.25 $\quad I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad (a > 0)$

Ако в интеграла направим субституцията $\quad x = a \sin t, \quad$ то $\quad dx = a \cos t dt\;$ и

$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a \cos t$. Тогава интегралът добива вида

$$I = a^2 \int \cos^2 t\, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{a^2}{2} \int (1+\cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2} \left(\int 1\, dt + \int \cos 2t\, dt \right) =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\int 1\, dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t\, d2t \right) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C =$$

$= \dfrac{a^2}{2} \left(t + \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + C. \quad$ Но $\quad t = \arcsin \frac{x}{a} \quad$ и следователно

$$I = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} \right) \sqrt{1 - \sin^2 \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)} \right) + C = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

11.26 $\quad I = \int \frac{1}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx \qquad (a > 0)$

Ако в интеграла направим субституцията

$x = a \operatorname{tg} t, \quad$ то $\quad \sqrt{x^2 + a^2} = \dfrac{a}{\cos t} \quad$ и $\quad dx = \dfrac{a}{\cos^2 t} dt.$

Тогава интегралът добива вида $\quad I = \int \dfrac{a \cos^3 t}{a^3 \cos^2 t}\, dt = \dfrac{1}{a^2} \int \cos t\, dt = \dfrac{1}{a^2} \sin t + C =$

$= \dfrac{1}{a^2} \dfrac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + C \quad$. Но $t = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$ и $I = \dfrac{1}{a^2} \sin \left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} \right) + C = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$

11.27 $\quad I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx \qquad (a > 0)$

Ако в интеграла направим субституцията

$x = \dfrac{a}{\cos t}, \quad$ то $\quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t \quad$ и $\quad dx = \dfrac{a \sin t}{\cos^2 t} dt.$

Тогава интегралът добива вида $\quad I = \dfrac{1}{a} \int \dfrac{\sin t \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t}\, dt = \dfrac{1}{a} \int 1\, dt = \dfrac{1}{a} t + C$

Но $t = \arccos \dfrac{a}{x}$ и $I = \dfrac{1}{a} \arccos \dfrac{a}{x} + C$

Интегриране по части

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ са две диференцируеми в даден интервал функции. Тогава

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Следователно

$$uv = \int vu'\,dx + \int uv'\,dx$$

$$uv = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Последното равенство се нарича формула за интегриране по части.

11.28 $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x(\ln x - 1) + C$

11.29 $5\int x^4 \ln x\,dx =$ (внасяме x^4 под знака на диференциала) $= \int \ln x\,dx^5 = x^5\ln x - \int x^5 d\ln x = x^5\ln x - \int x^5\frac{1}{x}dx = x^5\ln x - \int x^4 dx = x^5\ln x - \frac{x^5}{5} + C$

11.30 $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,d(x^2+1) = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$

11.31 $2\int x\operatorname{arctg} x\,dx =$ (внасяме x под знака на диференциала) $=$

$$= \int \operatorname{arctg} x\,dx^2 = x^2\operatorname{arctg} x - \int x^2 d\operatorname{arctg} x =$$

$$= x^2\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x^2\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= x^2\operatorname{arctg} x - \int 1\,dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x^2\operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x + C$$

11.32 $\int x^3e^x\,dx = \int x^3\,de^x = x^3e^x - \int e^x\,dx^3 = x^3e^x - 3\int x^2e^x\,dx = x^3e^x - 3\int x^2\,de^x = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - \int e^x\,dx^2\right) = x^3e^x - 3\left(x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\right) =$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int xe^x\,dx = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\int x\,de^x = x^3e^x - 3x^2e^x + 6\left(xe^x - \int e^x\,dx\right) =$$

$$= x^3e^x - 3x^2e^x + 6xe^x - 6e^x + C = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

11.33 $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2\sin x - \int \sin x\,dx^2 = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx =$

$$= x^2\sin x + 2\int x\,d\cos x = x^2\sin x + 2\left(x\cos x - \int \cos x\,dx\right) =$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

11.34 $\displaystyle I = \int e^x\sin x\,dx = \int \sin x\,de^x = e^x\sin x - \int e^x\,d\sin x = e^x\sin x -$ $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int \cos x\,de^x = e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x\,d\cos x\right) =$

$$= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - I$$

Следователно

$$2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

Интеграли, които не се изразяват чрез елементарни функции

Досега разгледахме различни методи за интегриране, но не си зададохме въпроса дали всяка функция има примитивна? Отговорът на този въпрос е положителен за непрекъснатите функции. Докато производната на елементарна функция е отново елементарна функция, то при операцията интегриране не за всяка елементарна функция съществува примитивна функция, която пак да е елементарна функция. Например, примитивната на $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ не е елементарна функция.

Ако примитивната функция $F(x)$ на дадена елементарна функция $f(x)$ не е елементарна функция, казва се, че интегралът $\displaystyle\int f(x)\,dx$ е нерешим.

Да се установи, че даден интеграл е нерешим е трудна задача и изисква сложни математически изследвания.

Добре са изучени следните примитивни функции (нерешими интеграли), които често се срещат в приложенията на математиката, механиката и в инженерните изследвания:

$$Li\,(x) = \int \frac{1}{\ln\ x}\, dx,$$ наречена "Интегрален логаритъм"

$$Si\,(x) = \int \frac{\sin\ x}{x}\, dx,$$ наречена "Интегрален синус"

$$Ci\,(x) = \int \frac{\cos\ x}{x}\, dx,$$ наречена "Интегрален синус"

$$Ei\,(x) = \int \frac{e^x}{x}\, dx,$$ наречена "Интегрална показателна функция"

$$\Phi\,(x) = \int e^{-x^2}\, dx$$ – "Интеграл на вероятностите или Функция на Лаплас"

$$S\,(x) = \int \sin\ x^2\, dx, \qquad C\,(x) = \int \cos\ x^2\, dx,$$ – "Интеграли на Френел"

$$E(x) = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2\ x}\ dx,$$ – "Елиптичен интеграл на Лежандър от първи род"

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\ x}}\, dx,$$ – "Елиптичен интеграл на Лежандър от втори род"

Задачи за самостоятелна работа:

11.46 $\int (5x^4 - 4x^3 + x - 1)\, dx$ Отг. $x^5 - x^4 + \dfrac{x^2}{2} - x + C$

11.47 $\int \left(x^3 + 3\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}\right) dx$ Отг. $\dfrac{x^4}{4} + 2x\sqrt{x} - \ln|x| + C$

11.48 $\int \left(x^2 - 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}\right) dx$ Отг. $\dfrac{x^3}{3} - 2x\sqrt{x} + \dfrac{2}{x} + C$

11.49 $\int \dfrac{x^5 + 3x^2 - 1}{x^2}\, dx$ Отг. $\dfrac{x^4}{4} + 3x + \dfrac{1}{x} + C$

11.50 $\int \dfrac{x^6 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1}{x^2}\, dx$ Отг. $\dfrac{x^5}{5} - x^3 + 2x - \ln|x| - \dfrac{1}{x} + C$

11.51 $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}+C$

11.52 $\displaystyle\int \frac{1}{4x+13}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{4}\ln|4x+13|+C$

11.53 $\displaystyle\int \cos(2x-1)\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}\sin(2x-1)+C$

11.54 $\displaystyle\int \left(e^{2x-213}-\sin(5x+3)\right)\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{2}e^{2x-213}+\frac{1}{5}\cos(5x+13)+C$

11.55 $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2+25}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C$

11.56 $\displaystyle\int \frac{1}{9x^2-16}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right|+C$

11.57 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+20}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{4}+C$

11.58 $\displaystyle\int \frac{5}{x^2+8x+12}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{5}{4}\ln\left|\frac{x+2}{x+6}\right|+C$

11.59 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}\,dx$ Отг. $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+10}\right|+C$

11.60 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$ Отг. $\displaystyle\arcsin\frac{x-2}{3}+C$

11.61 $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ Отг. $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$

11.62 $\displaystyle\int 3x^2e^{x^3}\,dx$ Отг. $e^{x^3}+C$

11.63 $\displaystyle\int 7\cos x\sin^6 x\,dx$ Отг. $\sin^7 x+C$

11.64 $\int 3\cos^3 x \sin^2 x\, dx$ Отв. $\sin^3 x - \dfrac{3\sin^5\ x}{5} + C$

11.65 $\int \dfrac{2x+1}{x^2+x+5}\, dx$ Отв. $\ln|x^2+x+5| + C$

11.66 $\int \dfrac{3}{\sqrt[5]{(5x+1)^2}}\, dx$ Отв. $\sqrt[5]{(5x+1)^3} + C$

11.67 $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\, dx$ Отв. $\sqrt{x^2+x+2} - \dfrac{1}{2}\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right| + C$

11.68 $\int \dfrac{x}{\sqrt[4]{x+1}}\, dx$ Отв.$\dfrac{4}{7}\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^7 - \dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3 + C$

11.69 $\int \dfrac{x}{\sqrt{x+2}-1}\, dx$ Отв. $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x+2}\right)^3 + x - 2\sqrt{x+2} - 2\ln|\sqrt{x+2}-1| + C$

11.70 $\int \dfrac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}\, dx$

Отв. $\dfrac{3x+4}{3} - \dfrac{(\sqrt[3]{3x+4})^2}{2} + \sqrt[3]{3x+4} - \ln|1+\sqrt[3]{3x+4}| + C$

11.71 $\int \ln(2x-5)\, dx$ Отв. $x\ln(2x-5) - x - \dfrac{5}{2}\ln|2x-5| + C$

11.72 $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\, dx$ Отв. $-\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} + C$

11.73 $\int \ln(x^2+1)\, dx$ Отв. $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{arctg}\, x + C$

11.74 $\int 2xe^{2x}\, dx$ Отв. $xe^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{2x} + C$

11.75 $\int x^2 e^{-x}\, dx$ Отв. $-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$

11.76 $\int x^2 \sin 2x\, dx$ Отв. $-\dfrac{1}{2}x^2\cos 2x + \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$

11.77 $\int (x+1)\cos 3x\,dx$ Отг. $\frac{1}{3}(x+1)\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$

11.78 $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$ Отг. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$

Глава 12

Определен интеграл. Приложения

Понятието определен интеграл е едно от основните понятия в математическия анализ. Счита се, че е било въведено в математиката в окончателен вид през XVII век от двамата създатели на диференциалното и интегрално смятане - Лайбниц и Нютон, които по различни пътища достигат до него. Основният техен резултат се състои в това, че са установили тясната връзка, която съществува между две понятия, на пръв поглед стоящи далеч едно от друго, като понятието определен интеграл и понятието производна на функция.

Една от задачите, които по естествен път водят до въвеждането на понятието определен интеграл, е задачата за пресмятане лицето на фигурата, заградена от графиката на една неотрицателна и ограничена в интервала [a, b] функция $f(x)$, абсцисната ос и правите с уравнения $x = a$ и $x = b$.
Нека е дадена функцията $y = f(x)$, дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]. Разделяме по произволен начин интервала [a, b] на подинтервали с точките

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

Дължината на i-ия интервал бележим с

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Във всеки подинтервал избираме произволна точка

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

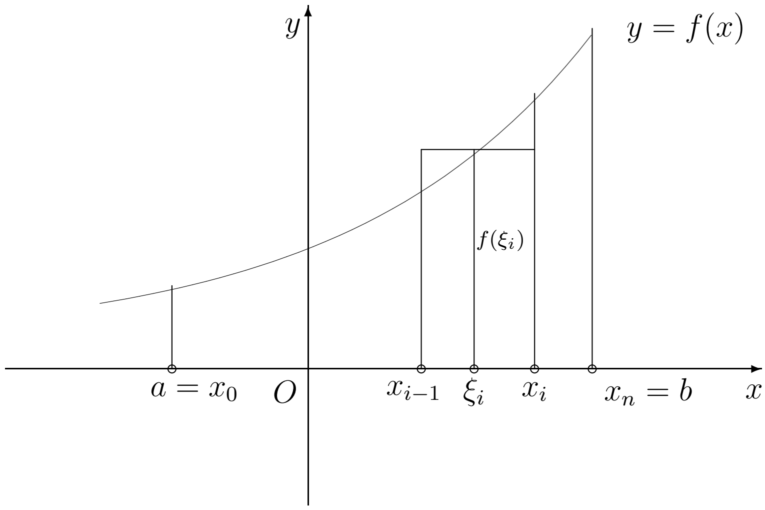
и пресмятаме стойността на функцията в тази точка, т.е. $f(\xi_i)$. След това умножаваме тази стойност по дължината на подинтервала, т.е. получаваме

$$f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

което е лицето на правоъгълника с основа отсечката, определена от точките x_{i-1} и x_i, и височина отсечката с дължина $f(\xi_i)$ (виж чертежа на следващата страница). Сумата от тези стойности за всичките n подинтервала

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

се нарича ***Риманова интегрална сума*** за функцията $f(x)$, съответстваща на даденото разбиване на интервала [a, b] на подинтервали и избора на точките ξ_i.



Да означим с λ максималната дължина на подинтервалите, т.е.

$$\lambda = max\,\Delta x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ако съществува границата

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$$

независимо от начина на разделяне на интервала [a, b] на подинтервали и избора на точките ξ_i, то функцията $f(x)$ се нарича **интегрируема в Риманов смисъл**, а границата S се нарича **определен интеграл** от функцията $f(x)$ в интервала [a,b] и се означава с

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Числото a се нарича ***долна граница***, а числото b - ***горна граница*** на определения интеграл.

Свойства:

1. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (по дефиниция)

2. $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a)$ *M-константа*

3. $\displaystyle\int_a^b Mf(x)\,dx = M\int_a^b f(x)\,dx$ *M-константа*

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

5. $\displaystyle\int_a^b (\ f(x)+g(x)\ )\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

6. Ако $f(x) \le g(x)$ при $x \in$[a, b], то $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

7. Ако $m \le f(x) \le M$, $x \in$[a, b], то $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

8. Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала [a, b], то съществува $c \in (a, b)$, такава че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Последното свойство е известно като **теорема за средните стойности.**

Теорема 12.1 *Ако една функция е неограничена в интервала [a, b], то тя не е интегрируема в Риманов смисъл.*

Теорема 12.2 *1. Всяка непрекъсната в интервала [a, b] функция е интегрируема в Риманов смисъл.*

2. Всяка монотонна и ограничена в интервала [a, b] функция е интегрируема в Риманов смисъл.

Интегралът като функция на горната си граница
Формула на Лайбниц-Нютон

Да разгледаме функцията

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du, \qquad x \in (a, b)$$

В следващата теорема ще докажем, че тази функция е примитивна на функцията $f(x)$.

Теорема 12.3 *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала [a, b], то*

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

е диференцируема и

$$F'(x) = f(x)$$

Доказателство:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^x f(u)\,du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} f(c)(x + \Delta x - x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

При доказателството използвахме теоремата за средните стойности и факта, че когато $\Delta x \to 0$, то $c \to x$. ■

Нека $\Phi(x)$ е произволна примитивна на $f(x)$. Тъй като $F(x)$ също е примитивна на $f(x)$, то както знаем $\Phi(x) = F(x) + C$.

Пресмятаме

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = (F(b) + C - C) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

Последното равенство се нарича ***формула на Лайбниц-Нютон***.

Въвеждаме означението $\quad F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формулата на Лайбниц-Нютон ни казва, че за да пресметнем един определен интеграл, първо трябва да намерим някаква примитивна функция на подинтегралната функция (т.е. да пресметнем съответния неопределен интеграл). След това от стойността на тази примитивна в горната граница на интеграла да извадим стойността ѝ в долната граница на интеграла.

12.1 $\displaystyle\int_0^1 (x^4+4x^3-3x+1)\,dx = \int_0^1 x^4\,dx + 4\int_0^1 x^3\,dx - 3\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1\,dx =$

$$= \left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) + \left(x^4\,\big|_0^1\right) - \left(3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) + \left(x\,\big|_0^1\right) = \frac{1}{5}+1-\frac{3}{2}+1 = \frac{7}{10}$$

12.2 $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+4e^{2x})\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx + 4\int_1^2 e^{2x}\,dx = \left(x^3\,\big|_1^2\right) + 2\int_1^2 e^{2x}\,d(2x) =$

$$= 7 + 2\left(e^{2x}\,\big|_1^2\right) = 7 + 2(e^4-e^2) = 7 + 2e^2(e^2-1)$$

12.3 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2x + \sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,d(2x) -$

$$\left(\cos x\,\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(\sin(2x)\,\big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - (0-1) = 1$$

Интегриране чрез смяна на променливата

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала [a, b] , а $x=\varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha,\beta]$ и стойностите ѝ принадлежат на интервала [a, b]. Освен това нека

$$\varphi(\alpha)=a \;\text{ и }\; \varphi(\beta)=b.$$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Доказателство: Нека

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Тогава

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

12.4 $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Ако направим субституцията $x = 2\sin t,$ то $dx = 2\cos t dt$ и

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2(1-\sin^2 t)} = 2\,|\cos t\,|.$$

Сменяме границите на интеграла в съответствие с таблицата

x	t
2	$\frac{\pi}{2}$
0	0

Сега интегралът добива вида

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t\,|\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\right) = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d2t\right) = 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2t\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Интегриране по части

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x).$ Тогава

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Доказателство: От формулата за интегриране по части при неопределен интеграл имаме

$$\int (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\,dx = u(x)v(x)$$

Следователно

$$\int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x))\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x))\,dx,$$

което записваме по-кратко по следния начин

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

■

12.5 $4\int_1^2 x^3 \ln x\,dx = \int_1^2 \ln x\,dx^4 = x^4 \ln x\ |_1^2 - \int_1^2 x^4 d\ln x = 16\ln 2 - \int_1^2 x^4 \frac{1}{x} dx =$

$16\ln 2 - \int_1^2 x^3 dx = 16\ln 2 - \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = 16\ln 2 - \left(4 - \frac{1}{4}\right) = 16\ln 2 - \frac{15}{4}$

12.6 $\int_0^1 x^2 e^x\,dx = \int_0^1 x^2\,de^x = x^2 e^x\ |_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx^2 = e - 2\int_0^1 xe^x\,dx =$

$= e - 2\int_0^1 x\,de^x = e - 2\left(xe^x\ |_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\right) = e - 2\left(e - e^x\ |_0^1\right) =$

$= e - 2(e - e + 1) = e - 2 \approx 0.7182$

Преди да се запознаем с някои приложения на определения интеграл, ще докажем следните формули:

1.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\,dx & \text{, ако } f(x) \text{ е четна} \\ 0 & \text{, ако } f(x) \text{ е нечетна} \end{cases}$$

Доказателство:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

В първия интеграл правим смяна на променливата $x = -t$. Тогава $dx = -dt$ и новите граници на интеграла са a и 0.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt =$$

$$\int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} [f(-t) + f(t)]\,dt$$

Остава само да вземем предвид, че ако функцията $f(x)$ е четна, то $f(x)+f(-x)=2f(x)$ и ако е нечетна $f(x)+f(-x)=0$. ■

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad n \text{ - четно}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{2}{3}, \qquad n \text{ - нечетно}$$

Доказателство:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\ \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d\cos x =$$

$$-(\sin^{n-1} x\cos x)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,d\sin^{n-1} x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,d\sin^{n-1} x =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \sin^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\ \sin^{n-2} x\,dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow \qquad I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Получаваме следната рекурентна зависимост

$$I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}$$

Прилагайки тази зависимост многократно, получаваме

$$I_n = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdot\frac{(n-5)}{(n-4)}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0, \qquad n \text{ - четно}$$

$$I_n = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdot\frac{(n-5)}{(n-4)}\cdots\frac{2}{3} I_1, \qquad n \text{ - нечетно}$$

Отчитайки, че $I_0 = \frac{\pi}{2}$ и $I_1 = 1$, получаваме формулите.

Доказателството за $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ е аналогично. ■

ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

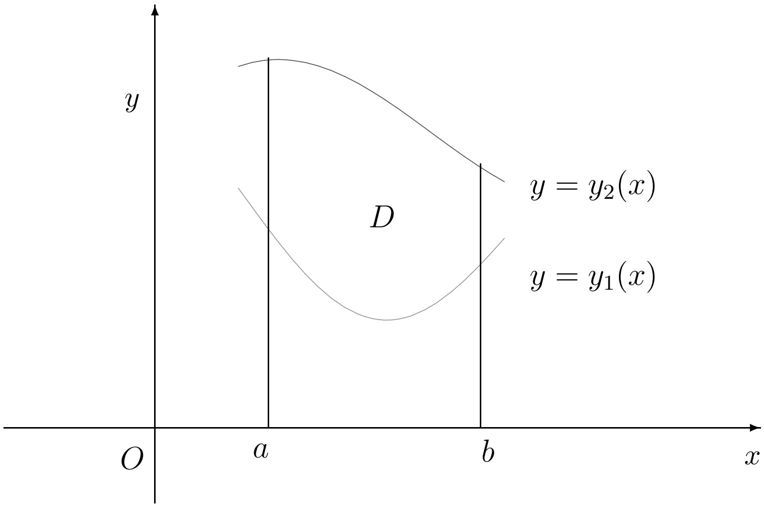
1. Лице на равнинна фигура

Областта, заградена от графиката на непрекъснатата функция $y = y(x) \geq 0$, правите линии с уравнения $x = a$, $x = b \quad (a < b)$ и абсцисната ос се нарича *криволинеен трапец*.

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq y(x) \end{cases}$$

Лицето на криволинейния трапец пресмятаме с формулата

$$S = \int_a^b y(x)\, dx \tag{12.1}$$



Лицето на областта D, заградена от графиките на непрекъснатите функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $\quad y_1(x) \leq y_2(x)$, и правите линии с уравнения $x = a$, $x = b$, т.е.

$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

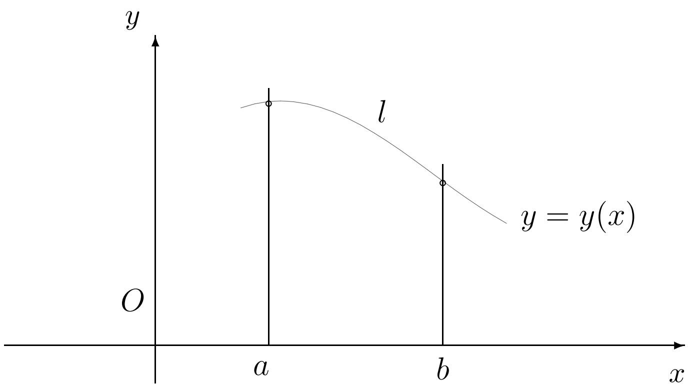
се пресмята с формулата

$$S_D = \int_a^b (\ y_2(x) - y_1(x)\ )\, dx \tag{12.2}$$

2. Дължина на дъга

Нека първата производна на функцията $y = y(x)$ е непрекъсната. Дължината на дъгата, която правите линии с уравнения $x = a$ и $x = b \quad (a < b)$ отсичат от графиката на функцията $y = y(x)$, пресмятаме с формулата

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \tag{12.3}$$



3. Обем на тяло

Ако пространствената област T е заградена от успоредните равнини с уравнения $x = a$ и $x = b \quad (a < b)$ и за всяко $x \in [a, b]$ знаем лицето на успоредното на тези равнини сечение $S(x)$, обемът на T пресмятаме с формулата

$$V_T = \int_a^b S(x)\, dx \tag{12.4}$$

4. Обем на ротационно тяло

Ако пространствена област е заградена от успоредните равнини $x = a, \quad x = b$ $(a < b)$ и ротационната повърхнина, получена от завъртането на кривата с уравнение $y = y(x) \geq 0$ около оста Ox, то всяко успоредно на равнините сечение е кръг и лицето му е $S(x) = \pi y^2(x)$. Следователно обемът на ротационното тяло ще пресмятаме с формулата

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx \tag{12.5}$$

5. Лице на повърхнина на ротационно тяло

Лицето на ротационната повърхнина от предишната точка се пресмята с формулата

$$\sigma = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{12.6}$$

6. Моменти и център на масата на равнинна крива линия

Ако дъгата от кривата, зададена с уравнението $y = y(x)$, $a \le x \le b$, има плътност $\rho = \rho(x)$, то:

Статичните моменти спрямо Ox и Oy се пресмятат с формулите

$$\begin{aligned} M_x &= \int_a^b \rho(x)y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \\ M_y &= \int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \end{aligned} \tag{12.7}$$

Инерчните моменти спрямо Ox и Oy се пресмятат с формулите

$$\begin{aligned} I_x &= \int_a^b \rho(x)y^2(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \\ I_y &= \int_a^b \rho(x)x^2\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \end{aligned} \tag{12.8}$$

Масата се пресмята с формулата

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{12.9}$$

Координатите на **центъра на масата** $G(x_G, y_G)$ пресмятаме с формулите

$$x_G = \frac{M_y}{m}, \qquad y_G = \frac{M_x}{m} \tag{12.10}$$

Ако дъгата е хомогенна, т.е $\rho = C$ е константа, тогава

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{l}\int_a^b x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \\ y_G &= \frac{1}{l}\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \end{aligned} \tag{12.11}$$

От формулата за y_G получаваме

$$y_G.l = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

Умножаваме двете страни на това равенство с 2π:

$$2\pi y_G.l = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \quad \text{т.е.}$$

$$2\pi y_G.l = \sigma$$

Полученият резултат е известен като

Теорема на Пап-Гулден: *Лицето на ротационната повърхнина, получена от въртенето на дъгата около ос, лежаща в равнината на дъгата и непресичаща дъгата, е равно на произведението от дължината на дъгата и дължината на окръжността, описана от нейния център на масата.*

12.7 Да се пресметне лицето на областта, заградена от правата $y = 2x$ и параболата $y^2 = 4x$.

Решение: Намираме пресечните точки на правата и параболата като решаваме системата от двете уравнения. Получаваме съответно:

$$4x^2 = 4x, \quad x^2 = x, \quad x^2 - x = 0, \quad x(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 1$$

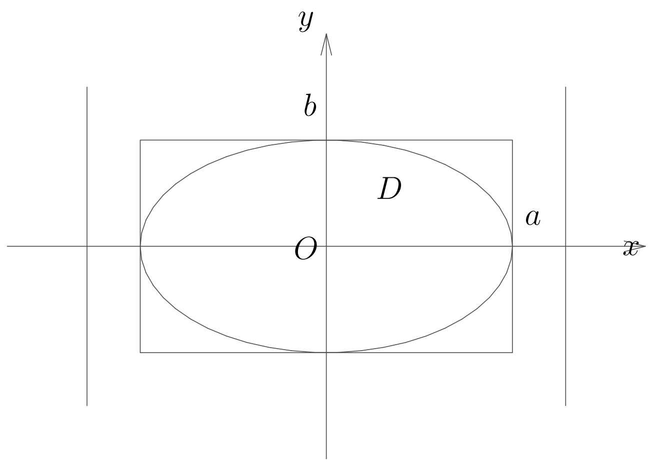
Следователно областта D е заградена от правите линии с уравнения $x = 0$, $x = 1$ и графиките на функциите $y = 2x$ и $y = 2\sqrt{x}$, т.е.

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x \le y \le 2\sqrt{x} \end{cases}$$

Тогава

$$S_D = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x)\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - 2\int_0^1 x\,dx = \frac{4}{3}\left(x\sqrt{x}\,\Big|_0^1\right) - \left(x^2\Big|_0^1\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

12.8 Да се пресметне лицето на областта, заградена от елипсата $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.



Решение: Нека

$$D:\ \begin{cases} 0\le x\le a \\ 0\le y\le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\end{cases}$$

Тогава

$$S=4S_D=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

Ако в интеграла направим субституцията $x=a\cos t$, то $dx=-a\sin t dt$ и

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}=a\mid\sin t\mid.$$

Сменяме границите в съответствие с таблицата

x	t
a	0
0	$\frac{\pi}{2}$

Сега интегралът добива вида

$$S=-\frac{4b}{a}\cdot a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^2 t\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab$$

Ако $a=b=r$, получаваме познатата формула за лице на кръг $S=\pi r^2$.

12.9 Да се пресметне дължината на дъгата от графиката на функцията $y=e^x$, заключена между точките с координати $(0,1)$ и $(1,e)$.

Решение:

$$l=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

Правим субституцията $\sqrt{1+e^{2x}}=t$, т.е. $x=\dfrac{1}{2}\ln(t^2-1)$. Тогава $dx=\dfrac{t}{t^2-1}dt$.

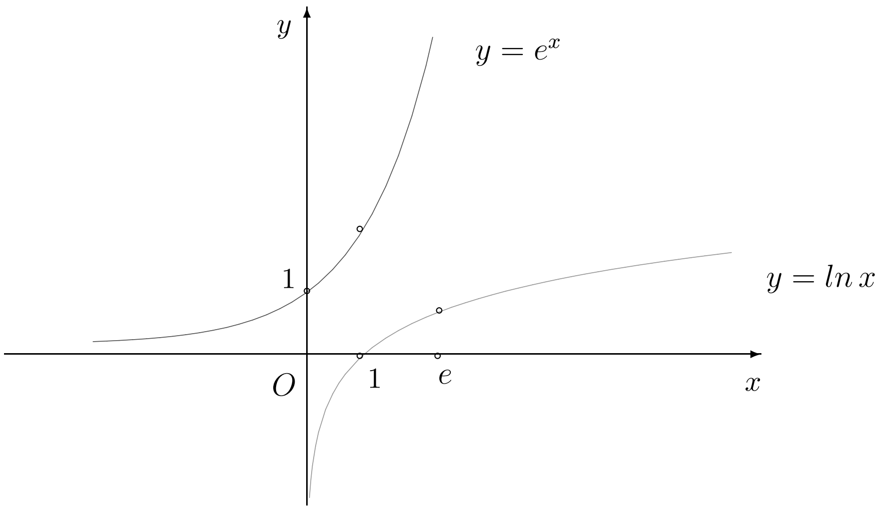
Сменяме границите:

x	t
1	$\sqrt{1+e^2}$
0	$\sqrt{2}$

Сега интегралът добива вида

$$l=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t^2}{t^2-1}\,dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}1\,dt+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{1}{t^2-1}\,dt=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}-1+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{2}-1}\right|\approx 2.0035$$



12.10 Да се пресметне дължината на дъгата от графиката на функцията $y=\ln x$, заключена между точките с координати $(1,0)$ и $(e,\ln e)$.

Решение:

$$l=\int_1^e\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx=\int_1^e\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$$

Правим субституцията $\sqrt{1+x^2}=t$, т.е. $x=\sqrt{t^2-1}$. Тогава $dx=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$.

Сменяме границите чрез таблицата

x	t
e	$\sqrt{1+e^2}$
1	$\sqrt{2}$

Сега интегралът добива вида

$$l=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t^2}{t^2-1}\,dt\approx 2.0035. \qquad \text{(виж предната задача)}$$

12.11 Да се намери центъра на тежестта на полуокръжността $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Решение: За решаването на тази задача ще използваме теоремата на Пап-Гулден. Поради симетрията $x_G = 0$. Ротационната повърхнина, получена от завъртането на полуокръжността е сфера с радиус a. Лицето на повърхнината на сферата е $4\pi a^2$. Дължината на полуокръжността е πa. Тогава $2\pi . y_G . \pi a = 4\pi a^2$. Следователно $y_G = \dfrac{2a}{\pi}$.

Задачи за самостоятелна работа:

12.12 Да се пресметне лицето на областта, заградена от кривата $y = \ln x$ и правите $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$.

Отг. e^2

12.13 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = 3+2x-x^2$ и абсцисната ос.

Отг. $\dfrac{32}{3}$

12.14 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = 2 - x^2$ и правата $y = x$.

Отг. $\dfrac{9}{2}$

12.15 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = x^2 + 2x$ и правата $y = x + 2$.

Отг. $\dfrac{9}{2}$

12.16 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y^2 = 4x + 4$ и правата $x + y = 2$.

Отг. $\dfrac{64}{3}$

12.17 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболите $y = x^2$ и $y^2 = 8x$.

Отг. $\dfrac{8}{3}$

12.18 Да се пресметне лицето на областта, заградена от линиите $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ и $x = 2$.

Отг. $\dfrac{3}{\ln 2} - \dfrac{4}{3}$

12.19 Да се пресметне лицето на областта, лежаща в първи и четвърти квадрант, заградена от кривите $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$.

Отг. $2\pi + \dfrac{4}{3}$

12.20 Да се пресметне лицето на частта от кръга $x^2 + y^2 = 4x$, разположена над параболата $y^2 = 2x$.

Отг. $\pi - \dfrac{8}{3}$