КОЛИЧЕСТВЕНИ МЕТОДИ В ИКОНОМИКАТА И УПРАВЛЕНИЕТО
(Решени задачи)

1. Да се определи дефиниционната област на функцията $y = \sqrt{16 - x^2}$.

Решение: Изразът под корена трябва да бъде неотрицателен. Следователно функцията е дефинирана, когато

$$16 - x^2 \geq 0.$$

Решаваме това квадратно неравенство, като първо умножаваме двете му страни с (-1), защото коефициентът пред x^2 е отрицателен. При това умножаване посоката на неравенството се променя. Получаваме:

$$x^2 - 16 \leq 0$$

$$(x-4)(x+4) \leq 0$$

Следователно дефиниционната област на функцията е интервалът $[-4, 4]$, т.е. $x \in [-4, 4]$.

2. Да се намери $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 2x - 11}{2x^5 - x^3 + 4x^2 - 11}$

Решение: Тъй като $x \to \infty$, то изнасяме най-високите степени на x в числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 2x - 11}{2x^5 - x^3 + 4x^2 - 11} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(6 - \dfrac{5x^3}{x^4} + \dfrac{12x^2}{x^4} + \dfrac{2x}{x^4} - \dfrac{11}{x^4}\right)}{x^5\left(2 - \dfrac{x^3}{x^5} + \dfrac{4x^2}{x^5} - \dfrac{11}{x^5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(6 - \dfrac{5}{x}\,{}^{\nearrow 0} + \dfrac{12}{x^2}\,{}^{\nearrow 0} + \dfrac{2}{x^3}\,{}^{\nearrow 0} - \dfrac{11}{x^4}\,{}^{\nearrow 0}\right)}{x^5\left(2 - \dfrac{1}{x^2}\,{}^{\searrow 0} + \dfrac{4}{x^3}\,{}^{\searrow 0} - \dfrac{11}{x^5}\,{}^{\searrow 0}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^4}{2x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

3. Пресметнете $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 12x + 11}{x^2 - 1}$

Решение: <u>Първи начин</u>:

Тъй като $\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$, то не можем да приложим директно теоремата за граница на частно на две функции. Разлагаме квадратните тричлени на множители и получаваме

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 12x + 11}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-11)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x - 11}{x + 1} = \frac{-10}{2} = -5$$

<u>Втори начин</u>:

При $x \to 1$ и числителят и знаменателят клонят към нула. Следователно имаме неопределеност от вида "нула върху нула". Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 12x + 11}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x - 12}{2x} = \frac{-10}{2} = -5$$

4. Ако за функцията $y = f(x)$ **е изпълнено** $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$, **то функцията в точката** x **е:**

Отговор: **непрекъсната** - това е първата от трите дефиниции на понятието непрекъснатост на функция в точка (виж страница 18 от учебника).

5. Намерете първата производна на функцията $f(x) = 5x^3 + 2e^x - 3\ln x$.

Решение:

$$f'(x) = 15x^2 + 2e^x - \frac{3}{x}$$

Тук използвахме правилото, че $(C.y(x))' = C.y'(x)$ и следните основни производни

$$(x^n)' = n.x^{n-1}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

6. Намерете първата производна на функцията $y(x) = (4x^3 - x^2 + 1)e^{2x}$

Решение: Тъй като функцията е произведение от две функции

$$u = u(x) = 4x^3 - x^2 + 1 \quad \text{и} \quad v = v(x) = e^{2x},$$

и втората функция $v(x) = e^{2x}$ е сложна, ще използваме формулата

$$(uv)' = u'v + uv'$$

и

$$(e^{2x})' = e^{2x}.(2x)' = e^{2x}.2 = 2.e^{2x}$$

Следователно

$$y' = (12x^2 - 2x)e^{2x} + (4x^3 - x^2 + 1)e^{2x}.2 = (8x^2 + 10x^2 - 2x + 2)e^{2x}$$

7. Намерете третата производна на функцията $y(x) = \ln 2x$

Решение: Функцията $y(x) = \ln 2x$ е сложна (съставна) функция. Формулата за производна на сложна функция е $[F(u(x))]' = F'(u(x)).u'(x)$. Следователно

$$y'(x) = \frac{1}{2x}.(2x)' = \frac{1}{2x}.2 = \frac{1}{x}, \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad y'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

8. Уравнението на допирателната към графиката на функцията $y(x) = 2x^3 - 5x + 2$ **в точката с абсциса** $x_0 = -1$ **е:**

Решение: Уравнението на допирателната е

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

Намираме $y'(x) = 6x^2 - 5$. Пресмятаме

$$y(x_0) = y(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1) + 2 = -2 + 5 + 2 = 5$$

и

$$y'(x_0) = y'(-1) = 6(-1)^2 - 5 = 6 - 5 = 1$$

Заместваме в уравнението и получаваме

$$y - 5 = (x - (-1)) \Leftrightarrow y - 5 = x + 1 \Leftrightarrow x - y + 6 = 0$$

9. Пресметнете $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + 3x^2}{e^x - x - 1}$

Решение: При $x \to 0$ и числителят и знаменателят клонят към нула. Следователно имаме неопределеност от вида "нула върху нула". Прилагаме два пъти правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^3 + 3x^2}{e^x - x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{15x^2 + 6x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{30x + 6}{e^x} = 6$$

10. Функцията $y = \dfrac{e^x}{x}$ **е растяща в интервала:**

Решение: От теорема 3.1 на стр. 45 от учебника знаем, че една функция е растяща в даден интервал, тогава и само тогава, когато първата и производна е неотрицателна в този интервал. Ето защо трябва да намерим първата производна на функцията и да видим къде тя е неотрицателна. Тъй като функцията е частно на две функции

$$u = u(x) = e^x \quad \text{и} \quad v = v(x) = x,$$

ще използваме формулата

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y'(x) = \frac{e^x.x - e^x}{x^2} = \frac{e^x.(x-1)}{x^2}$$

Както добре знаем експоненциалната функция е винаги положителна, $x^2 > 0$ и от тук следва, че знакът на първата производна се определя от линейната функция $x - 1$, т.е.

$$y'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Следователно функцията $y = \dfrac{e^x}{x}$ е растяща в интервала $[1, +\infty)$.

11. Твърдението "Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в отворения интервал (a, b), то съществува точка $c \in (a, b)$, такава че $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ " е известно като теорема на:

Отговор: **Лагранж**- (това е четвъртата от основните теореми на диференциалното смятане -Теорема 2.5, страница 37 от учебника).

12. Пресметнете $\displaystyle\int \left(2xe^{x^2} + \frac{x^3-2x+1}{x}\right) dx$

Решение:

$$\int \left(2xe^{x^2} + \frac{x^3-2x+1}{x}\right) dx = \int 2xe^{x^2}\, dx + \int \frac{x^3-2x+1}{x}\, dx =$$

$$= \int 2xe^{x^2}\, dx + \int \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \int e^{x^2}\, d(x^2) + \int x^2\, dx - 2\int 1\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= e^{x^2} + \frac{x^3}{3} - 2x + \ln|x| + C$$

13. Пресметнете $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-1}\, dx$

Решение: Ако в интеграла направим субституцията $\sqrt[3]{x+1} = t$, т.е. $x = t^3 - 1$, то $dx = 3t^2 dt$ и интегралът добива вида

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-1}\, dx = \int \frac{3t^2}{t-1}\, dt = 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}\, dt = 3\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}\, dt =$$

$$= 3\int (t+1)\, dt + 3\int \frac{1}{t-1}\, d(t-1) = 3\frac{t^2}{2} + 3t + 3\ln|t-1| + C$$