

ТИПОВИ ЗАДАЧИ ПО ВМ-I

(за оценка "среден")

1. Да се намери произведението на две комплексни числа (разкриваме скобките, като умножаваме "всяко с всяко" и помним, че $i^2 = -1$):

1.1 $(2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i + 3(-1) = -1 + 5i$

1.2 $(3 + 4i)(4 - i)$ отг. $16 + 13i$

1.3 $(5 - 3i)(2 - 5i)$ отг. $-5 - 31i$

2. Да се намери произведението две матрици (умножаваме по правилото "ред по стълб"):

2.1
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

2.2
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 отг. $\begin{pmatrix} 2 & 15 & -1 \\ 1 & 8 & -2 \\ 6 & 15 & 2 \end{pmatrix}$

2.3
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
 отг. $\begin{pmatrix} 11 & -11 & 2 \\ -1 & 14 & -4 \end{pmatrix}$

3. Да се реши линейна система от две уравнения с две неизвестни чрез формулите на Крамер $\left(x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}\right)$:

3.1
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 6x_2 = -8 \end{cases}$$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 16 = 10$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6$$

Следователно: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{2} = -3$

3.2 $\left| \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 = 8 \end{array} \right.$ отг. $x_1 = -2, \quad x_2 = 3$

3.3 $\left| \begin{array}{l} 5x - 2y = 30 \\ 2x + y = 21 \end{array} \right.$ отг. $x = 8, \quad y = 5$

4. Намерете скаларното и векторното произведение на два вектора:

4.1 $\vec{a}(2, -1, 2)$ и $\vec{b}(6, -3, 2)$

Решение: 1. Скаларното произведение е:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 = 12 + 3 + 4 = 15 + 4 = 19$$

2. Векторното произведение е:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 8\vec{j}.$$

4.2 $\vec{a}(3, -1, -2)$ и $\vec{b}(2, -3, 1)$ отг. $7, \quad (-7, -7, -7)$

4.3 $\vec{a}(5, 2, 3)$ и $\vec{b}(2, 4, -7)$ отг. $-3, \quad (-26, 41, 16)$

5. Пресметнете

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 12x + 11}{x^2 - 1}$$

Решение: Първи начин:

Тъй като $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$, то не можем да приложим директно теоремата за граница на частно на две функции. Разлагаме квадратните тричлени на множители и получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 12x + 11}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-11)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-11}{x+1} = \frac{-10}{2} = -5$$

Втори начин:

При $x \rightarrow 1$ и числителят и знаменателят клонят към нула. Следователно имаме неопределеност от вида "нула върху нула". Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 12x + 11}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 12}{2x} = \frac{-10}{2} = -5$$

6. Намерете първата производна на функцията

$$y(x) = (4x^3 - x^2 + 1)e^{2x^3}.$$

Решение: Тъй като функцията е произведение от две функции

$$u = u(x) = 4x^3 - x^2 + 1 \quad \text{и} \quad v = v(x) = e^{2x^3},$$

и втората функция $v(x) = e^{2x^3}$ е сложна, ще използваме формулата

$$(uv)' = u'v + uv'$$

и

$$(e^{2x^3})' = e^{2x^3} \cdot (2x^3)' = e^{2x^3} \cdot 6x^2$$

Следователно

$$y' = (12x^2 - 2x)e^{2x^3} + (4x^3 - x^2 + 1)e^{2x^3} \cdot 6x^2 = (24x^5 - 6x^4 + 18x^2 - 2x)e^{2x^3}$$