ВИСША МАТЕМАТИКА - III
ПРИМЕРЕН ТЕСТ - № 1
Решения

1. Пресметнете $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x^5 - 2x^3 + x^2e^{2x} - 3x - 2}{x^2}\,dx$

Решение:

$$\int_1^2 \frac{5x^5 - 2x^3 + x^2e^{2x} - 3x - 2}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{5x^5}{x^2} - \frac{2x^3}{x^2} + \frac{x^2e^{2x}}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)dx =$$

$$= \int_1^2 \left(5x^3 - 2x + e^{2x} - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx = 5\int_1^2 x^3\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 e^{2x}\,dx - 3\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx - 2\int_1^2 x^{-2}\,dx =$$

$$= 5\left(\frac{x^4}{4}\,\Big|_1^2\right) - 2\left(\frac{x^2}{2}\,\Big|_1^2\right) + \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}\,d(2x) - 3\left(\ln|x|\,\Big|_1^2\right) + 2\left(x^{-1}\,\Big|_1^2\right)dx =$$

$$= 5\left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{2x}\,\Big|_1^2\right) - 3\ln 2 + 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) =$$

$$= 5\frac{15}{4} - 2\frac{3}{2} + 2\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^4 - e^2\right) - 3\ln 2 = \frac{75}{4} - 4 + \frac{1}{2}\left(e^4 - e^2\right) - 3\ln 2 =$$

$$= \frac{59}{4} + \frac{e^2}{2}\left(e^2 - 1\right) - 3\ln 2$$

2. Пресметнете $\displaystyle 3\int_0^1 (x^2-1)e^{3x}\,dx$

Решение: Първо внасяме функцията e^{3x} под знака на диференциала и след това ще интегрираме два пъти по части. Да припомним, че внасянето под знака на диференциала е **интегриране**. Формулата за интегриране по части е $\displaystyle\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

$$3\int_0^1 (x^2-1)e^{3x}\,dx = \int_0^1 (x^2-1)e^{3x}\,d(3x) = \int_0^1 (x^2-1)\,d\,e^{3x} =$$

$$= \left((x^2-1)e^{3x}\,\Big|_0^1\right) - \int_0^1 e^{3x}\,d\,(x^2-1) = 1 - 2\int_0^1 x.e^{3x}\,d\,x = 1 - \frac{2}{3}\int_0^1 x.e^{3x}\,d\,(3x) =$$

(внасяме пак e^{3x} под знака на диференциала и интегрираме отново по части)

$$= 1 - \frac{2}{3}\int_0^1 x.\, d\, e^{3x} = 1 - \frac{2}{3}\left(\left(x.e^{3x} \ \Big|_0^1\right) - \int_0^1 e^{3x}\, d\, x\right) = 1 - \frac{2e^3}{3} + \frac{2}{9}\int_0^1 e^{3x}\, d\,(3x) =$$

$$= 1 - \frac{2}{3}e^3 + \frac{2}{9}\left(e^{3x} \ \Big|_0^1\right) = 1 - \frac{2}{3}e^3 + \frac{2}{9}(e^3 - 1) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{2}{9}e^3 - \frac{6}{9}e^3 = \frac{7}{9} - \frac{4}{9}e^3$$

3. Пресметнете лицето на фигурата, ограничена от $y = \dfrac{2x^4 + 4x^2 - 6x}{x^2 + 2}$**,** $x = 1$**,** $x = 3$ **и абсцисната ос.**

Решение:

$$S = \int_1^3 \frac{2x^4 + 4x^2 - 6x}{x^2 + 2}\, dx = \int_1^3 \frac{2x^2(x^2 + 2) - 6x}{x^2 + 2}\, dx = \int_1^3 \left(2x^2 - \frac{6x}{x^2 + 2}\right) dx =$$

$$= 2\int_1^3 x^2\, dx - 6\int_1^3 \frac{x}{x^2 + 2}\, dx = 2\left(\frac{x^3}{3}\ \Big|_1^3\right) - 3\int_1^3 \frac{1}{x^2 + 2}\, d(x^2 + 2) =$$

$$= 2\frac{26}{3} - 3\left(\ln(x^2 + 2) \ \Big|_1^3\right) = \frac{52}{3} - 3\,(\ln 11 - \ln 3) = \frac{52}{3} - 3\ln\frac{11}{3}$$

4. Пресметнете лицето на фигурата, ограничена от параболата $y = x^2 - 8x + 16$ **и правата** $y = 2x - 5$.

Решение: Намираме пресечните точки на правата и параболата, като решаваме системата от двете уравнения. Получаваме съответно:

$$x^2 - 8x + 16 = 2x - 5, \quad x^2 - 10x + 21 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{10 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad \text{и} \quad x_2 = 7$$

Следователно областта D е заградена от правите линии с уравнения $x = 3$, $x = 7$ и графиките на функциите $y_1(x) = x^2 - 8x + 16$ и $y_2(x) = 2x - 5$, т.е.

$$D: \begin{cases} 3 \leq x \leq 7 \\ x^2 - 8x + 16 \leq y \leq 2x - 5 \end{cases}$$

За да се убедите, че графиката на $y_2(x)$ е над графиката на $y_1(x)$ е достатъчно да пресметнете стойностите на тези функции в произволкна точка от интервала $x \in (3, 7)$. Например при $x = 4$, $y_1(4) = 16 - 32 + 16 = 0$, $y_2(4) = 8 - 5 = 3$.

Тогава

$$S_D = \int_3^7 [(2x-5)-(x^2-8x+16)]\, dx = \int_3^7 (10x-x^2-21)\, dx = 10\int_3^7 x\, dx - \int_3^7 x^2\, dx - 21\int_3^7 1\, dx =$$

$$= 10\left(\frac{x^2}{2}\ \Big|_3^7\right) - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_3^7\right) - \left(x\Big|_3^7\right) = 5\left(x^2\ \Big|_3^7\right) - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_3^7\right) - \left(x\Big|_3^7\right) =$$

$$= 5(49-9) - \frac{343-27}{3} - (7-3) = 196 - \frac{316}{3} = \frac{588-316}{3} = \frac{272}{3}$$

5. Теоретичен въпрос

6. Намерете z'_x **на функцията** $z(x,y) = (x^3y^4-1)e^{x^2y^3}$

Решение:

$$z'_x = (x^3y^4-1)'_x.e^{x^2y^3} + (x^3y^4-1).\left(e^{x^2y^3}\right)'_x = (3x^2y^4).e^{x^2y^3} + (x^3y^4-1).\left(e^{x^2y^3}\right).2xy^3 =$$

$$= e^{x^2y^3}(3x^2y^4 + 2x^4y^7 - 2xy^3)$$

7. Намерете z''_{yy} **на функцията** $z(x,y) = 2x^5y^3 + 3x^3y^4 - 2x^2 - 5xy^3 - 2y$

Решение:

$$z'_y = 6x^5y^2 + 12x^3y^3 - 0 - 15xy^2 - 2$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = 12x^5y + 36x^3y^2 - 30xy$$

8. Намерете стационарните точки на функцията $z(x,y) = 4x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 6y$

Решение: Намираме първите и вторите частни производни. Те са:

$$z'_x = 8x - 2y + 4$$

$$z'_y = -2x + 6y - 6$$

$$\begin{array}{ll} A: & z''_{xx} = 8 \\ B: & z''_{xy} = -2 \\ C: & z''_{yy} = 6 \end{array}$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left|\begin{array}{rcll} 8x-2y+4 & = & 0 & /:2 \\ -2x+6y-6 & = & 0 & /:2 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rcl} 4x-y+2 & = & 0 \\ -x+3y-3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rcr} 4x-y & = & -2 \\ -x+3y & = & 3 \end{array}\right.$$

Последната система ще решим с формулите на Крамер:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6+3}{12-1} = -\frac{3}{11}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12-2}{12-1} = \frac{10}{11}$$

Следователно стационарната точка е точката $M\left(-\frac{3}{11}, \frac{10}{11}\right)$

9. Намерете локалните екстремуми на функцията $\quad z(x,y)=6x^2-2xy+3y^2+4x-6y$

Решение: Намираме първите и вторите частни производни. Те са:

$$z'_x=12x-2y+4$$

$$z'_y=-2x+6y-6$$

$$\begin{array}{ll} A: & z''_{xx}=12\\ B: & z''_{xy}=-2\\ C: & z''_{yy}=6\end{array}$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left|\begin{array}{rcll} 12x-2y+4 &=& 0 & /:2\\ \\ -2x+6y-6 &=& 0 & /:2\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rcl} 6x-y+2 &=& 0\\ \\ -x+3y-3 &=& 0\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{rcr} 6x-y &=& -2\\ \\ -x+3y &=& 3\end{array}\right.$$

Отново с формулите на Крамер получаваме:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-6+3}{18-1}=-\frac{3}{17}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}6 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{18-2}{18-1}=\frac{16}{17}$$

Следователно стационарната точка е точката $M\left(-\frac{3}{17},\frac{16}{17}\right)$

Сега пресмятаме вторите частни производни в стационарната точка (в нашия случай те не зависят от x и y)

$$A=z''_{xx}\left(-\frac{3}{17},\frac{16}{17}\right)=12, \qquad B=z''_{xy}\left(-\frac{3}{17},\frac{16}{17}\right)=-2, \qquad C=z''_{yy}\left(-\frac{3}{17},\frac{16}{17}\right)=6,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}12 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}=72-4=68>0$$

Следователно функцията има екстремум. От $A=z''_{xx}\left(-\frac{3}{17},\frac{16}{17}\right)=12>0$ следва, че в точката $M\left(-\frac{3}{17},\frac{16}{17}\right)$ имаме **локален минимум**.

10. Теоретичен въпрос

11. Решението на уравнението $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$ **е**:

Решение: Тъй като функциите $M(x,y)=x^2+y^2$ и $N(x,y)=-2xy$ са хомогенни от втори ред, то уравнението е хомогенно. Преобразуваме го по следния начин

$$2xy\,dy=(x^2+y^2)\,dx, \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}, \qquad \text{т.е}$$

$$y'=\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}} \quad (x\neq 0) \tag{1}$$

Полагаме $\frac{y}{x} = z$, т.е. $y = x.z$, диференцираме $y' = z + x\,z'$ и заместваме в (1). Получаваме

$$z + x\,z' = \frac{1+z^2}{2z} \iff x\,z' = \frac{1+z^2}{2z} - z \iff x\frac{dz}{dx} = \frac{1+z^2-2z^2}{2z} = \frac{1-z^2}{2z} \iff \frac{2z}{1-z^2}\,dz = \frac{1}{x}\,dx,$$

което е с разделени променливи. Интегрираме и получаваме

$$\int \frac{2z}{1-z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx, \iff -\int \frac{1}{1-z^2}\,d(1-z^2) = \int \frac{1}{x}\,dx,$$

$$-\ln|1-z^2| = \ln|x| - \ln C \iff \ln|x| + \ln|1-z^2| = \ln C \iff |x^2-y^2| = C.|x|$$

12. Решението на уравнението $y''' - 4y'' - 21y' = 0$ е:

Решение: Характеристичното уравнение е $r^3 - 4r^2 - 21r = 0$. Изнасяме общия множител r пред скоби и получаваме

$$r(r^2 - 4r - 21) = 0$$

От първия множител получаваме $r_1 = 0$. Другите два корена намираме от квадратното уравнение $r^2 - 4r - 21 = 0$ $(a = 1,\ b = -4,\ c = -21)$.

$$r_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2}$$

$$r_2 = -3 \quad \text{и} \quad r_3 = 7$$

Следователно корените са $r_1 = 0$, $r_2 = -3$ и $r_3 = 7$.
На първия корен съответства функцията $y_1(x) = e^{0x} = 1$, на втория $y_2(x) = e^{-3x}$, на третия $y_3(x) = e^{7x}$ и решението е

$$y(x) = C_1 + C_2\,.\,e^{-3x} + C_3\,.\,e^{7x}$$

13. Определете вида на частно решение на уравнението $y'' + 3y' - 10y = (2x-1)e^{2x}$

Решение: 1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' + 3y' - 10y = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 + 3r - 10 = 0$ има корени $r_1 = 2$, $r_2 = -5$ и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{-5x}$$

2. Сега търсим вида на частно решение $\eta(x)$. За определяне вида на частно решение е важна дясната страна на уравнението $f(x) = (2x-1)e^{2x}$. Тъй като числото в степенния показател на експоненциалната функция $a = 2$ е корен на характеристичното уравнение и полиномът $P_n(x) = P_1(x) = 2x - 1$ е полином от първа степен, то частното решение има вида

$$\eta(x) = x(Ax + B)\,.e^{2x} = (Ax^2 + Bx)\,.e^{2x}$$

14. Намерете частно решение на уравнението $y'' - 9y' = 12x - 5$

Решение: 1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' - 9y' = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 - 9r = r(r-9) = 0$ има корени $r_1 = 0$, $r_2 = 9$ и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1 + C_2\,.\,e^{9x}$$

2. Сега търсим вида на частно решение $\eta(x)$. При определяне вида на частно решение е важна дясната страна на уравнението $f(x) = 12x - 5 = (12x - 5)e^{0x}$. Тъй като числото в степенния показател на експоненциалната функция $a = 0$ е корен на характеристичното уравнение и полиномът $P_n(x) = P_1(x) = 12x - 5$ е полином от първа степен, то частно решение има вида

$$\eta(x) = x(Ax + B)\,.e^{0x} = Ax^2 + Bx$$

Тъй като $\eta(x)$ е частно решение, т.е.

$$\eta''(x) - 9\eta'(x) = 12x - 5, \tag{2}$$

то намираме първата и втора производни на $\eta(x)$

$$\eta'(x) = 2Ax + B, \qquad \eta''(x) = 2A$$

заместваме в (2) и получаваме

$$2A - 9(2Ax + B) = 12x - 5 \iff -18Ax + 2A - 9B = 12x - 5$$

Но два полинома са равни, само ако коефициентите пред съответните степени са равни. Следователно

$$\left| \begin{array}{lcl} -18A & = & 12 \\ 2A - 9B & = & -5 \end{array} \right.$$

От първото равенство намираме $A = -\dfrac{12}{18} = -\dfrac{2}{3}$, заместваме във второто и намираме $B = \dfrac{11}{27}$.

Следователно

$$\eta(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{27}$$

15. Решете уравнението $y'' + 3y' - 10y = (5x - 3)e^{3x}$

Решение: 1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' + 3y' - 10y = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 + 3r - 10 = 0$ има корени $r_1 = 2$, $r_2 = -5$ и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{-5x}$$

2. Сега търсим частно решение $\eta(x)$. Тъй като числото в степенния показател на експоненциалната функция $a = 3$ не е корен на характеристичното уравнение и полиномът $P_n(x) = P_1(x) = 5x - 3$ е полином от първа степен, то частно решение търсим от вида

$$\eta(x) = (Ax + B)\,.e^{3x}$$

Тъй като $\eta(x)$ е частно решение, т.е.

$$\eta''(x) + 3\eta'(x) - 10\eta(x) = (5x - 3)\,.e^{3x}, \tag{3}$$

то намираме първата и втора производни на $\eta(x)$

$$\eta'(x) = A\,.e^{3x} + 3(Ax + B)\,.e^{3x} = (3Ax + A + 3B)\,.e^{3x}$$

$$\eta''(x) = (3A)\,.e^{3x} + 3(3Ax + A + 3B)\,.e^{3x} = (9Ax + 6A + 9B)\,.e^{3x}$$

заместваме в (3) и получаваме

$$(9Ax+6A+9B)\,.e^{3x}+3\,.(3Ax+A+3B)\,.e^{3x}-10(Ax+B)\,.e^{3x}=(5x-3)\,.e^{3x}$$

$$(8Ax+9A+8B)\,.e^{3x}=(5x-3)\,.e^{3x}$$

Съкращаваме на $e^{3x}\neq 0$ и получаваме

$$8Ax+9A+8B=5x-3$$

Но два полинома са равни, само ако коефициентите пред съответните степени са равни. Следователно

$$\left|\begin{array}{lcr} 8A & = & 5 \\ 9A+8B & = & -3 \end{array}\right.$$

От първото равенство намираме $A=\dfrac{5}{8}$ и заместваме във второто

$$9.\frac{5}{8}+8B=-3,\qquad 8B=-3-\frac{45}{8}=-\frac{24+45}{8}=-\frac{69}{8}\quad\Longrightarrow\quad B=-\frac{69}{64}.$$

Следователно

$$\eta(x)=\left(\frac{5}{8}x-\frac{69}{64}\right)e^{3x}$$

Решението на уравнението е

$$y(x)=Y(x)+\eta(x)=C_1\,.\,e^{2x}+C_2\,.\,e^{-5x}+\left(\frac{5}{8}x-\frac{69}{64}\right)e^{3x}$$