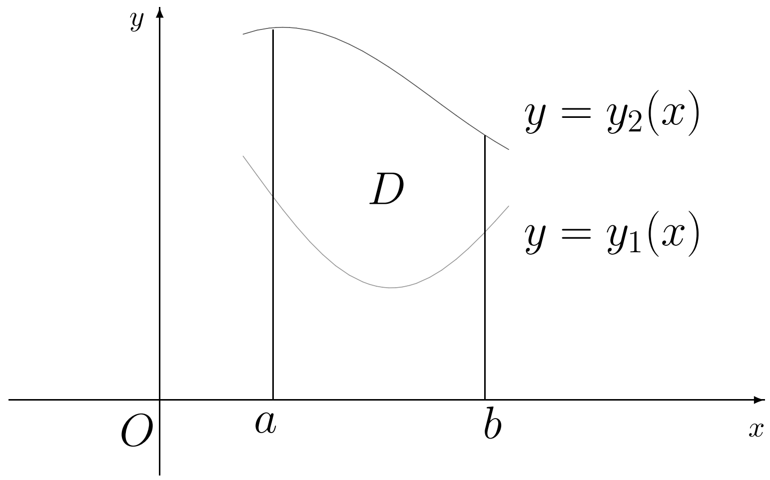
РУМЕН НИКОЛОВ ДАСКАЛОВ

ЕЛЕНА МЕТОДИЕВА ДАСКАЛОВА

В И С Ш А   М А Т Е М А Т И К А

ЧАСТ III



$$S_D = \int_a^b (\ y_2(x) - y_1(x)\ )\, dx$$

Определен интеграл, функция на две променливи, обикновени диференциални уравнения

Габрово, 2020

Автори: Авторите са преподаватели в катедра "Математика" на Технически университет - Габрово

проф. дмн Румен Николов Даскалов е завършил ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски". Защитил е докторат в областта на комбинаторната теория на кодирането. Член е на American Mathematical Society (AMS), The Institute of Electrical and Electronics Engeneers (IEEE) и Съюз на математиците в България (СМБ).

доц. д-р Елена Методиева Даскалова е завършила ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски". Защитила е докторат в областта на комбинаторната теория на кодирането.

В И С Ш А М А Т Е М А Т И К А, Част III,

Учебник за студенти от инженерно-технически специалности.

Трето издание, 97 стр.

ПРЕДГОВОР

Учебникът “Висша математика“, част III, е предназначен за студенти от Технически университет - Габрово с образователно-квалификационна степен “бакалавър“.

Основна цел на авторите е била да се намери необходимия баланс между последователното, логическо изграждане на математическите понятия и усвояването им от бъдещите инженери като основен апарат за изучаване на общо-техническите и специални дисциплини и използването им в приложни и научни изследвания. В съответствие с ограничения хорариум, ударението е поставено на втората страна, като изложението е подкрепено с множество примери и подробно решени задачи.

Разгледани са следните раздели: определен интеграл и неговите приложения, функция на две променливи, екстремум на функция на две променливи; обикновени диференциални уравнения. Това е основната част от материала, който се изучава от студентите от всички специалности през трети семестър.

Всяка глава съдържа съответния теоретичен материал, примери, голям брой решени задачи и задачи за самостоятелна подготовка. Всички задачи имат отговори, което ще улесни студентите при самостоятелната им работа. Направени са корекции на откритите грешки в предишните издания.

Учебникът ще бъде особено полезен за студенти задочно и дистанционно обучение.

Юни 2020 г. Авторите

СЪДЪРЖАНИЕ

Глава 1

Определен интеграл. Приложения

Целта на тази глава е да запознае читателя с понятието определен интеграл, основните методи за пресмятане на определен интеграл и някои приложения.

Понятието определен интеграл е едно от основните понятия в математическия анализ. Счита се, че е било въведено в математиката в окончателен вид през XVII век от двамата създатели на диференциалното и интегрално смятане - Лайбниц и Нютон, които по различни пътища достигат до него. Основният техен резултат се състои в това, че са установили тясната връзка, която съществува между две понятия, на пръв поглед стоящи далеч едно от друго, като понятието определен интеграл и понятието производна на функция.

Една от задачите, които по естествен път водят до въвеждането на понятието определен интеграл, е задачата за пресмятане лицето на фигурата, заградена от графиката на една неотрицателна и ограничена в интервала [a, b] функция $f(x)$, абсцисната ос и правите с уравнения $x = a$ и $x = b$.
Нека е дадена функцията $y = f(x)$, дефинирана и непрекъсната в затворения интервал [a, b]. Разделяме по произволен начин интервала [a, b] на подинтервали с точките

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

Дължината на i-ия интервал бележим с

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Във всеки подинтервал избираме произволна точка

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

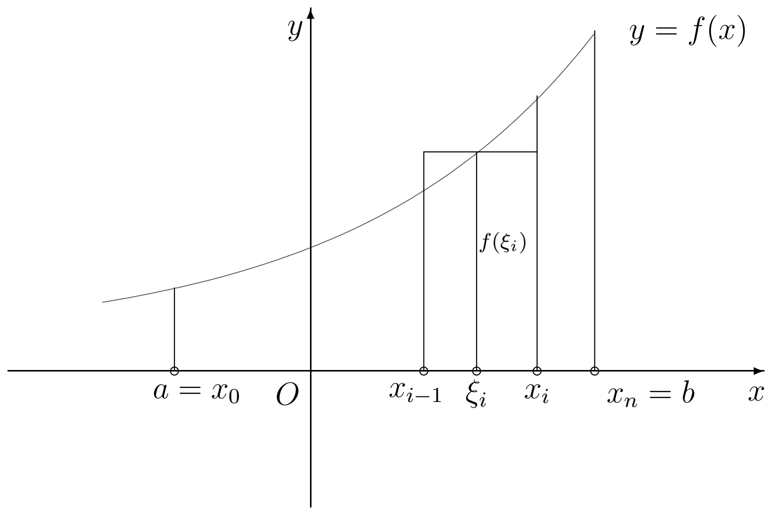
и пресмятаме стойността на функцията в тази точка, т.е. $f(\xi_i)$. След това умножаваме тази стойност по дължината на подинтервала, т.е. получаваме

$$f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

което е лицето на правоъгълника с основа отсечката, определена от точките x_{i-1} и x_i, и височина отсечката с дължина $f(\xi_i)$ (виж чертежа на следващата страница).
Сумата от тези стойности за всичките n подинтервала

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

се нарича ***Риманова интегрална сума*** за функцията $f(x)$, съответстваща на даденото разбиване на интервала [a, b] на подинтервали и избора на точките ξ_i.



Да означим с λ максималната дължина на подинтервалите, т.е.

$$\lambda = max\, \Delta x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ако съществува границата

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = S$$

независимо от начина на разделяне на интервала [a, b] на подинтервали и избора на точките ξ_i, то функцията $f(x)$ се нарича **интегрируема в Риманов смисъл**, а границата S се нарича **определен интеграл** от функцията $f(x)$ в интервала [a,b] и се означава с

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Числото a се нарича ***долна граница***, а числото b - ***горна граница*** на определения интеграл.

Свойства:

1. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (по дефиниция)

2. $\displaystyle\int_a^b M\,dx = M(b-a)$ *M-константа*

3. $\displaystyle\int_a^b Mf(x)\,dx = M\int_a^b f(x)\,dx$ *M-константа*

4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

5. $\displaystyle\int_a^b (\ f(x) + g(x)\ )\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

6. Ако $f(x) \leq g(x)$ при $x \in$[a, b], то $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

7. Ако $m \leq f(x) \leq M,\ \ x \in$[a, b], то $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

8. Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала [a, b], то съществува $c \in (a,b)$, такава че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Последното свойство е известно като **теорема за средните стойности.**

Теорема 1.1 *Ако една функция е неограничена в интервала $[a,b]$, то тя не е интегрируема в Риманов смисъл.*

Теорема 1.2 *1. Всяка непрекъсната в интервала $[a,b]$ функция е интегрируема в Риманов смисъл.*

2. Всяка монотонна и ограничена в интервала $[a,b]$ функция е интегрируема в Риманов смисъл.

Интегралът като функция на горната си граница
Формула на Лайбниц-Нютон

Да разгледаме функцията

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du, \qquad x \in (a, b)$$

В следващата теорема ще докажем, че тази функция е примитивна на функцията $f(x)$.

Теорема 1.3 *Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[a, b]$, то*

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

е диференцируема и

$$F'(x) = f(x)$$

Доказателство:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^{x+\Delta x} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\int_a^x f(u)\,du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du - \int_a^x f(u)\,du \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} f(c)(x + \Delta x - x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$$

При доказателството използвахме теоремата за средните стойности и факта, че когато $\Delta x \to 0$, то $c \to x$. ■

Нека $\Phi(x)$ е произволна примитивна на $f(x)$. Тъй като $F(x)$ също е примитивна на $f(x)$, то както знаем $\Phi(x) = F(x) + C$.

Пресмятаме

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = (F(b) + C - C) = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx, \text{ т.е.}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Последното равенство се нарича ***формула на Лайбниц-Нютон.***

Въвеждаме означението $\quad \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Формулата на Лайбниц-Нютон ни казва, че за да пресметнем един определен интеграл, първо трябва да намерим някаква примитивна функция на подинтегралната функция (т.е. да пресметнем съответния неопределен интеграл). След това от стойността на тази примитивна в горната граница на интеграла да извадим стойността ѝ в долната граница на интеграла.

1.1 $\displaystyle\int_0^1 (x^4+4x^3-3x+1)\,dx = \int_0^1 x^4\,dx + 4\int_0^1 x^3\,dx - 3\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 1\,dx =$

$$= \left(\frac{x^5}{5}\,\bigg|_0^1\right) + \left(x^4\,\Big|_0^1\right) - \left(3\frac{x^2}{2}\,\bigg|_0^1\right) + \left(x\,\Big|_0^1\right) = \frac{1}{5} + 1 - \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{10}$$

1.2 $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+4e^{2x})\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx + 4\int_1^2 e^{2x}\,dx = \left(x^3\,\Big|_1^2\right) + 2\int_1^2 e^{2x}\,d(2x) =$

$$= 7 + 2\left(e^{2x}\,\Big|_1^2\right) = 7 + 2(e^4 - e^2) = 7 + 2e^2(e^2-1)$$

1.3 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2x + \sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,d(2x) -$

$$\left(\cos x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(\sin(2x)\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - (0-1) = 1$$

Интегриране чрез смяна на променливата

Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в интервала [a, b] , а $x = \varphi(t)$ има непрекъсната производна в интервала $[\alpha, \beta]$ и стойностите ѝ принадлежат на интервала [a, b]. Освен това нека

$$\varphi(\alpha) = a \ \text{ и } \ \varphi(\beta) = b.$$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Доказателство: Нека

$$\int f(x)\,dx = F(x).$$

Тогава

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

1.4 $\quad I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$

Ако направим субституцията $\quad x = 2\sin t, \quad$ то $\quad dx = 2\cos t dt \quad$ и

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2(1-\sin^2 t)} = 2\ |\cos t\ |.$$

Сменяме границите на интеграла в съответствие с таблицата

x	t
2	$\frac{\pi}{2}$
0	0

Сега интегралът добива вида

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t\ |\cos t\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\, dt =$$

$$2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, dt\right) = 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, d2t\right) = 2t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin 2t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Интегриране по части

Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Тогава

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du$$

Доказателство: От формулата за интегриране по части при неопределен интеграл имаме

$$\int (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\, dx = u(x)v(x)$$

Следователно

$$\int_a^b (u(x)v'(x) + v(x)u'(x))\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (u(x)v'(x)\, dx + \int_a^b v(x)u'(x))\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b (u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x))\, dx,$$

което записваме по-кратко по следния начин

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du$$

$\blacksquare$

1.5 $4\int_1^2 x^3 \ln x\, dx = \int_1^2 \ln x\, dx^4 = x^4 \ln x\, |_1^2 - \int_1^2 x^4 d \ln x = 16\ln 2 - \int_1^2 x^4 \frac{1}{x} dx =$

$16\ln 2 - \int_1^2 x^3 dx = 16\ln 2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = 16\ln 2 - \left(4 - \frac{1}{4}\right) = 16\ln 2 - \frac{15}{4}$

1.6 $\int_0^1 x^2 e^x\, dx = \int_0^1 x^2\, de^x = x^2 e^x\, |_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx^2 = e - 2\int_0^1 xe^x\, dx =$

$= e - 2\int_0^1 x\, de^x = e - 2\left(xe^x\, |_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx\right) = e - 2\left(e - e^x\, |_0^1\right) =$

$= e - 2(e - e + 1) = e - 2 \approx 0.7182$

Преди да се запознаем с някои приложения на определения интеграл, ще докажем следните формули:

1.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\, dx & ,\text{ако } \ f(x) \quad \text{е четна} \\ \\ 0 & ,\text{ако } \ f(x) \quad \text{е нечетна} \end{cases}$$

Доказателство:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx$$

В първия интеграл правим смяна на променливата $x = -t$. Тогава $dx = -dt$ и новите граници на интеграла са a и 0.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_a^0 f(-t)\, dt + \int_0^a f(t)\, dt =$$

$$\int_0^a f(-t)\, dt + \int_0^a f(t)\, dt = \int_0^a [f(-t) + f(t)]\, dt$$

Остава само да вземем предвид, че ако функцията $f(x)$ е четна, то $f(x) + f(-x) = 2f(x)$ и ако е нечетна $f(x) + f(-x) = 0$. ∎

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad n \text{ - четно}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdots\frac{2}{3}, \qquad n \text{ - нечетно}$$

Доказателство:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\ \ \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,d\cos x =$$

$$-(\sin^{n-1} x\cos x)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,d\sin^{n-1} x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,d\sin^{n-1} x =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \ \sin^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\ \ \sin^{n-2} x\,dx =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow \qquad I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

Получаваме следната рекурентна зависимост

$$I_n = \frac{n-1}{n}\ I_{n-2}$$

Прилагайки тази зависимост многократно, получаваме

$$I_n = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdot\frac{(n-5)}{(n-4)}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0, \qquad n \text{ - четно}$$

$$I_n = \frac{(n-1)}{n}\cdot\frac{(n-3)}{(n-2)}\cdot\frac{(n-5)}{(n-4)}\cdots\frac{2}{3}I_1, \qquad n \text{ - нечетно}$$

Отчитайки, че $I_0 = \frac{\pi}{2}$ и $I_1 = 1$, получаваме формулите.

Доказателството за $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ е аналогично. ■

Задачи за самостоятелна работа:

1.7 $\displaystyle\int_0^1 (6x^5 - 3x^2 + 5x - 1)\, dx$ Отг. $\frac{3}{2}$

1.8 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4 + 5x^2 - 1}{x^2}\, dx$ Отг. $\frac{41}{6}$

1.9 $\displaystyle\int_4^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$ Отг. $\frac{32}{3}$

1.10 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{4x + 9}\, dx$ Отг. $\frac{1}{4} \ln \frac{13}{5}$

1.11 $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{x^2 - 4}\, dx$ Отг. $\frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}$

1.12 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 4x + 20}\, dx$ Отг. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$

1.13 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}\, dx$ Отг. $\ln \left| \frac{4+\sqrt{17}}{3+\sqrt{10}} \right|$

1.14 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos x \sin^4 x\, dx$ Отг. 1

1.15 $\displaystyle\int_3^7 \frac{x}{\sqrt{x + 2} - 1}\, dx$ Отг. $16 - 2 \ln 2 - \frac{4}{3}\sqrt{5} + 2 \ln(\sqrt{5} - 1)$

1.16 $\displaystyle\int_e^{e^2} (x^2 - 2) \ln x\, dx$ Отг. $\frac{1}{9}(5e^6 - 2e^3 - 18e^2)$

1.17 $\displaystyle\int_{-1}^2 2x^2 e^{2x}\, dx$ Отг. $\frac{5}{2}(e^4 - e^{-2})$

1.18 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx$ Отг. $\frac{\pi}{4}$

1.19 $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx$ Отг. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

1.20 $\displaystyle\int_3^4 \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 5}\, dx$ Отг. $\frac{3}{2} \ln \frac{5}{2} + 4 \operatorname{arctg} 2 - \pi$

ПРИЛОЖЕНИЯ НА ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

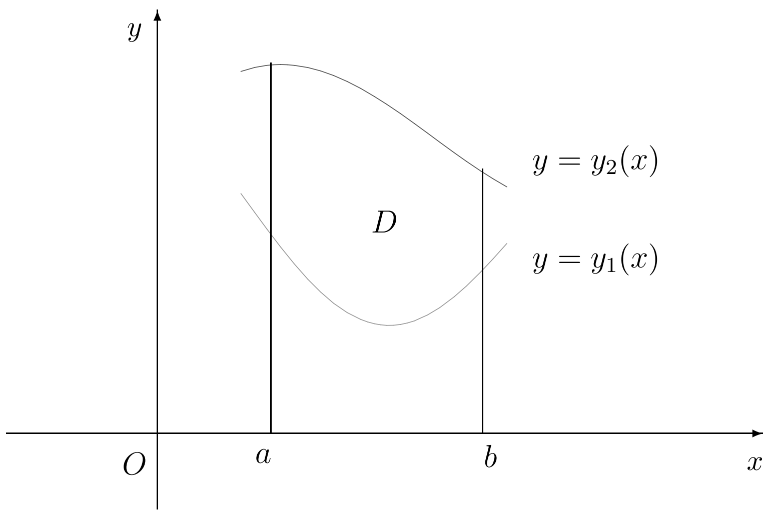
1. Лице на равнинна фигура

Областта, заградена от графиката на непрекъснатата функция $y = y(x) \geq 0$, правите линии с уравнения $x = a$, $x = b$ $\quad (a < b)$ и абсцисната ос се нарича *криволинеен трапец*.

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq y(x) \end{cases}$$

Лицето на криволинейния трапец пресмятаме с формулата

$$S = \int_a^b y(x)\,dx \tag{1.1}$$



Лицето на областта D, заградена от графиките на непрекъснатите функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $\quad y_1(x) \leq y_2(x)$, и правите линии с уравнения $x = a$, $x = b$, т.е.

$$D : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

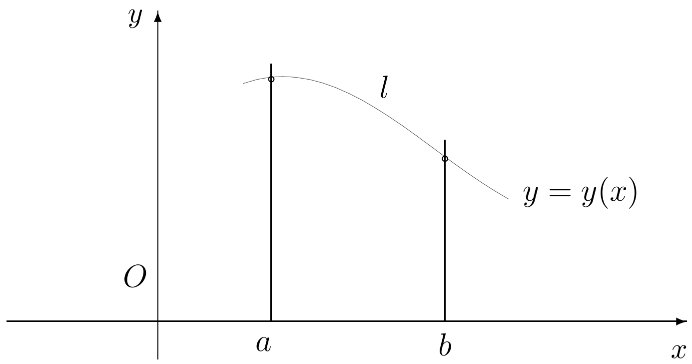
се пресмята с формулата

$$S_D = \int_a^b (\ y_2(x) - y_1(x)\ )\,dx \tag{1.2}$$

2. Дължина на дъга

Нека първата производна на функцията $y = y(x)$ е непрекъсната. Дължината на дъгата, която правите линии с уравнения $x = a$ и $x = b$ $\quad (a < b)$ отсичат от графиката на функцията $y = y(x)$, пресмятаме с формулата

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^{\,2}(x)}\, dx \tag{1.3}$$



3. Обем на тяло

Ако пространствената област T е заградена от успоредните равнини с уравнения $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ и за всяко $x \in [a, b]$ знаем лицето на успоредното на тези равнини сечение $S(x)$, обемът на T пресмятаме с формулата

$$V_T = \int_a^b S(x)\, dx \tag{1.4}$$

4. Обем на ротационно тяло

Ако пространствена област е заградена от успоредните равнини $x = a$, $\quad x = b$ $(a < b)$ и ротационната повърхнина, получена от завъртането на кривата с уравнение $y = y(x) \geq 0$ около оста Ox, то всяко успоредно на равнините сечение е кръг и лицето му е $S(x) = \pi y^2(x)$. Следователно обемът на ротационното тяло ще пресмятаме с формулата

$$V = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx \tag{1.5}$$

5. Лице на повърхнина на ротационно тяло

Лицето на ротационната повърхнина от предишната точка се пресмята с формулата

$$\sigma = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx \tag{1.6}$$

6. Моменти и център на масата на равнинна крива линия

Ако дъгата от кривата, зададена с уравнението $y = y(x)$, $a \le x \le b$, има плътност $\rho = \rho(x)$, то:

Статичните моменти спрямо Ox и Oy се пресмятат с формулите

$$\begin{aligned} M_x &= \int_a^b \rho(x)y(x)\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx \\ M_y &= \int_a^b \rho(x)x\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx \end{aligned} \tag{1.7}$$

Инерчните моменти спрямо Ox и Oy се пресмятат с формулите

$$\begin{aligned} I_x &= \int_a^b \rho(x)y^2(x)\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx \\ I_y &= \int_a^b \rho(x)x^2\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx \end{aligned} \tag{1.8}$$

Масата се пресмята с формулата

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx \tag{1.9}$$

Координатите на **центъра на масата** $G(x_G, y_G)$ пресмятаме с формулите

$$x_G = \frac{M_y}{m}, \qquad y_G = \frac{M_x}{m} \tag{1.10}$$

Ако дъгата е хомогенна, т.е $\rho = C$ е константа, тогава

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{l}\int_a^b x\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx, \\ y_G &= \frac{1}{l}\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx \end{aligned} \tag{1.11}$$

От формулата за y_G получаваме

$$y_G.l = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx$$

Умножаваме двете страни на това равенство с 2π:

$$2\pi y_G.l = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^{\,2}(x)}\,dx, \quad \text{т.е.}$$

$$2\pi y_G.l = \sigma$$

Полученият резултат е известен като

Теорема на Пап-Гулден: *Лицето на ротационната повърхнина, получена от въртенето на дъгата около ос, лежаща в равнината на дъгата и непресичаща дъгата, е равно на произведението от дължината на дъгата и дължината на окръжността, описана от нейния център на масата.*

1.21 Да се пресметне лицето на областта, заградена от правата $y = 2x$ и параболата $y^2 = 4x$.

Решение: Намираме пресечните точки на правата и параболата като решаваме системата от двете уравнения. Получаваме съответно:

$$4x^2 = 4x, \quad x^2 = x, \quad x^2 - x = 0, \quad x(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{и} \quad x_2 = 1$$

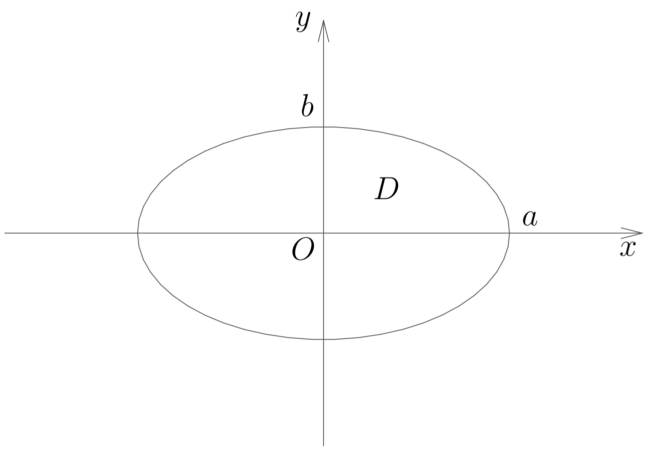
Следователно областта D е заградена от правите линии с уравнения $x = 0$, $x = 1$ и графиките на функциите $y = 2x$ и $y = 2\sqrt{x}$, т.е.

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x \le y \le 2\sqrt{x} \end{cases}$$

Тогава

$$S_D = \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x)\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - 2\int_0^1 x\,dx = \frac{4}{3}\left(x\sqrt{x}\,\Big|_0^1\right) - \left(x^2\Big|_0^1\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

1.22 Да се пресметне лицето на областта, заградена от елипсата $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$



Решение: Нека

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

Тогава

$$S = 4S_D = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Ако в интеграла направим субституцията $x = a\cos t$, то $dx = -a\sin t dt$ и

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos^2 t)} = a\ |\sin t\ |.$$

Сменяме границите в съответствие с таблицата

x	t
a	0
0	$\frac{\pi}{2}$

Сега интегралът добива вида

$$S = -\frac{4b}{a} \cdot a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab$$

Ако $a = b = r$, получаваме познатата формула за лице на кръг $S = \pi r^2$.

1.23 Да се пресметне дължината на дъгата от графиката на функцията $y = e^x$, заключена между точките с координати $(0, 1)$ и $(1, e)$.

Решение:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

Правим субституцията $\sqrt{1 + e^{2x}} = t$, т.е. $x = \dfrac{1}{2}\ln(t^2 - 1)$. Тогава $dx = \dfrac{t}{t^2 - 1}dt.$

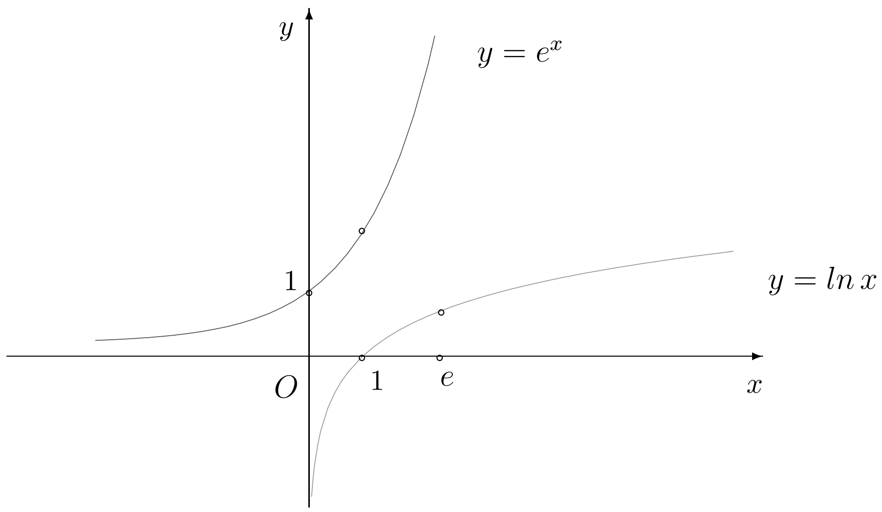
Сменяме границите:

x	t
1	$\sqrt{1+e^2}$
0	$\sqrt{2}$

Сега интегралът добива вида

$$l = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} 1\,dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{1}{t^2-1}\,dt =$$

$$= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1 + \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{2}-1}\right| \approx 2.0035$$



1.24 Да се пресметне дължината на дъгата от графиката на функцията $y = \ln x$, заключена между точките с координати $(1, 0)$ и $(e, \ln e)$.

Решение:

$$l = \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx = \int_1^e \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$$

Правим субституцията $\sqrt{1+x^2} = t$, т.е. $x = \sqrt{t^2-1}$. Тогава $dx = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt$.

Сменяме границите чрез таблицата

x	t
e	$\sqrt{1+e^2}$
1	$\sqrt{2}$

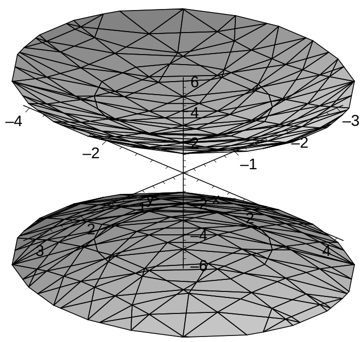
Сега интегралът добива вида

$$l = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2}{t^2-1}\,dt \approx 2.0035. \qquad \text{(виж предната задача и ВМ II, глава 1, стр. 12)}$$

1.25 Да се пресметне обема на тялото

$$T: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ z = 2c \end{cases}$$

Решение:
Първата повърхнина е хиперболоид с две повърхнини, а втората е равнина.



Тялото T е заключено между успоредните равнини $z = c$ и $z = 2c$. При $c < z \leq 2c$ всяко успоредно на равнините $z = c$ и $z = 2c$ сечение е елипса с уравнение

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{z^2 - c^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{z^2 - c^2}\right)^2} = 1$$

От задача 1.8 знаем да пресмятаме лице на област, заградена от елипса. Следователно

$$S(z) = \pi \cdot \frac{a}{c}\sqrt{z^2 - c^2} \cdot \frac{b}{c}\sqrt{z^2 - c^2} = \pi\frac{ab}{c^2}(z^2 - c^2)$$

Прилагаме формула (1.4) и получаваме

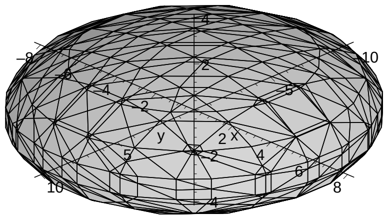
$$V = \int_c^{2c} S(z)\,dz = \pi\frac{ab}{c^2}\int_c^{2c}(z^2 - c^2)\,dz = \pi\frac{ab}{c^2}\int_c^{2c} z^2\,dz - \pi ab\int_c^{2c} 1\,dz =$$

$$= \pi\frac{ab}{3c^2}(z^3 \,\big|_c^{2c}) - \pi ab(z \,\big|_c^{2c}) = \pi\frac{ab}{3c^2}(7c^3) - \pi abc = \pi\frac{7abc}{3} - \pi abc = \frac{4}{3}\pi abc$$

1.26 Да се пресметне обема на тялото T, ограничено от елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение:



При $-c \leq z \leq c$ всяко перпендикулярно на оста Oz сечение е елипса с уравнение

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2}\right)^2} = 1$$

Следователно

$$S(z) = \pi \cdot \frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2} \cdot \frac{b}{c}\sqrt{c^2-z^2} = \pi\frac{ab}{c^2}(c^2-z^2)$$

Прилагаме формула (1.4) и получаваме

$$V = 2\int_0^c S(z)\,dz = 2\pi\frac{ab}{c^2}\int_0^c (c^2-z^2)\,dz = 2\pi ab\int_0^c 1\,dz - 2\pi\frac{ab}{c^2}\int_0^c z^2\,dz =$$

$$= 2\pi ab(z\ |_0^c) - 2\pi\frac{ab}{3c^2}(z^3\ |_0^c) = 2\pi abc - \frac{2\pi abc}{3} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Ако $a = b = c = R$, получаваме познатата формула за обем на кълбо $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

1.27 Да се намери центъра на тежестта на полуокръжността $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Решение: За решаването на тази задача ще използваме теоремата на Пап-Гулден. Поради симетрията $x_G = 0$. Ротационната повърхнина, получена от завъртането на полуокръжността е сфера с радиус a. Лицето на повърхнината на сферата е $4\pi a^2$. Дължината на полуокръжността е πa. Тогава $2\pi.y_G.\pi a = 4\pi a^2$. Следователно $y_G = \dfrac{2a}{\pi}$.

Задачи за самостоятелна работа:

1.28 Да се пресметне лицето на областта, заградена от кривата $y = \ln x$ и правите $x = e$, $x = e^2$ и $y = 0$.

Отг. e^2

1.29 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = 3+2x-x^2$ и абсцисната ос.

Отг. $\dfrac{32}{3}$

1.30 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = 2 - x^2$ и правата $y = x$.

Отг. $\dfrac{9}{2}$

1.31 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y = x^2 + 2x$ и правата $y = x + 2$.

Отг. $\dfrac{9}{2}$

1.32 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $y^2 = 4x + 4$ и правата $x + y = 2$.

Отг. $\dfrac{64}{3}$

1.33 Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболите $y = x^2$ и $y^2 = 8x$.

Отг. $\dfrac{8}{3}$

1.34 Да се пресметне лицето на областта, заградена от линиите $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ и $x = 2$.

Отг. $\dfrac{3}{\ln 2} - \dfrac{4}{3}$

1.35 Да се пресметне лицето на областта, лежаща в първи и четвърти квадрант, заградена от кривите $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$.

Отг. $2\pi + \dfrac{4}{3}$

1.36 Да се пресметне лицето на частта от кръга $x^2 + y^2 = 4x$, разположена над параболата $y^2 = 2x$.

Отг. $\pi - \dfrac{8}{3}$

1.37 Да се пресметне лицето на областта, заградена от линиите $xy = 2$ и $x+y = 3$.

Отг. $\dfrac{3}{2} - 2\ln 2$

1.38 Да се пресметне лицето на областта, заградена от линиите $y = (x+2)^2$, $xy = 9$, $x = 2$ и $y = 0$.

Отг. $\dfrac{19}{3} + 9\ln 2$

1.39 Да се пресметне лицето на областта, заградена от кривите $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$ и ординатната ос.

Отг. $2\ln 2 - \dfrac{1}{2}$

1.40 Да се пресметне лицето на областта, заградена от линиите $(x-1)(y+2) = 2$ и $x + y = 2$.

Отг. $\dfrac{3}{2} - 2\ln 2$

1.41 Да се пресметне лицето на областта, заградена от $y = \ln x$, допирателната към нея в точката $(e, 1)$ и абсцисната ос.

Отг. $\dfrac{e}{2} - 1$

1.42* Да се пресметне лицето на областта, заградена от параболата $(y-2)^2 = x-1$, допирателната към нея в точката с ордината $y_0 = 3$ и абсцисната ос.

Отг. 9

Упътване: Разменете ролите на x и y.

1.43* Да се пресметне лицето на областта, заградена от линиите $y = \ln(x+2)$, $y = 2\ln x$, $y = 0$.

Отг. $4\ln 2 - 1$

1.44 Намерете дължината на дъгата от параболата $y = x^2$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Отг. $\dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{1}{4}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$

1.45 Намерете дължината на дъгата от линията $y^2 = x^3$ от началото на координатната система до точката $(4, 8)$.

Отг. $\dfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$

1.46 Намерете дължината на дъгата от линията $y = \dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$, заключена между пресечните точки на кривата с абсцисната ос.

Отг. $2\sqrt{3}$

1.47 Намерете обема на ротационното тяло, получено от завъртането около оста Ox на областта, ограничена от линиите $2y = x^2$ и $2x + 2y = 3$.

Отг. $\dfrac{272}{15}\pi$

1.48 Намерете обема на ротационното тяло, получено от завъртането около оста Ox на областта, ограничена от линиите $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и $x = 0$.

Отг. $\dfrac{11}{4}\pi$

1.49 Намерете статичния момент M_x на синусоидата $y = \sin x, \;\; 0 \le x \le \pi$.

Отг. $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

1.50 Намерете инерчния момент I_x на $y = e^x, \;\; 0 \le x \le 1$.

Отг. $\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{(1+e^2)^3} - \sqrt{8}\right)$

Несобствени интеграли

Дотук разгледахме понятието определен интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, само ако функцията $f(x)$ е непрекъсната и интервалът $[a,b]$ е краен и затворен. В много случаи, обаче, се налага да се интегрира в безкрайни интервали като $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ или $(-\infty,+\infty)$. Освен това може функцията $f(x)$ да не е непрекъсната в краищата или във вътрешна точка на интервала $[a,b]$, т.е. да има особеност. Това налага понятието определен интеграл да бъде разширено с така наречените несобствени интеграли.

I. Интеграли с безкрайни граници

Случай 1. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x \in [\,a,+\infty)$. Да разгледаме редицата $\{b_n\}$ $(a < b_n)$, която клони (дивергира) към $+\infty$. Определеният интеграл $I(b_n) = \displaystyle\int_a^{b_n} f(x)\,dx$ съществува и е непрекъсната функция на b_n.

Дефиниция 1.1 *Ако*

$$\lim_{b_n\to+\infty}\int_a^{b_n} f(x)\,dx$$

е число, то тази граница се нарича несобствен интеграл и се бележи с

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \text{т.е} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{b_n\to+\infty}\int_a^{b_n} f(x)\,dx$$

Казва се, че несобственият интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ съществува или че е сходящ. В противен случай се казва, че интегралът не съществува или че е разходящ.

Случай 2. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x \in (-\infty, b\,]$. Да разгледаме редицата $\{a_n\}$ $(a_n < b)$, която клони (дивергира) към $-\infty$. Определеният интеграл $I(a_n) = \displaystyle\int_{a_n}^{b} f(x)\,dx$ съществува и е непрекъсната функция на a_n.

Дефиниция 1.2 *Ако*

$$\lim_{a_n \to -\infty} \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx$$

е число, то тази граница се нарича несобствен интеграл и се бележи с

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \quad \textit{т.е} \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \;=\; \lim_{a_n \to -\infty} \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx$$

Случай 3. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$. Тогава

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Последното равенство се разбира в смисъл, че ако несобствените интеграли в дясната страна на равенството са сходящи, то и интегралът в лявата страна на равенството е сходящ.

1.51 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} x\big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$

1.52 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln x\big|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty,$ т.е.

интегралът е разходящ.

1.53 $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-1} x^{-2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\bigg|_a^{-1} \right) = \lim_{a\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{a} \right) = 1$

1.54 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

Вторият интеграл е пресметнат в задача 1.51. Ще пресметнем първия. Имаме:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg} x\big|_a^0\right) = \lim_{a\to-\infty} (0 - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2}$$

Следователно $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

В много случаи е достатъчно да се установи само дали несобственият интеграл е сходящ или разходящ и да се оцени неговата стойност. В такива случаи са полезни следните теореми:

Теорема 1.4 *Ако при* $x \geq a$ *е изпълнено* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *и* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *е сходящ, то и* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *е сходящ и*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

Теорема 1.4 ни казва, че ако ограничим отгоре един несобствен интеграл със сходящ интеграл, то и първият интеграл е сходящ.

Теорема 1.5 *Ако при* $x \geq a$ *е изпълнено* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *и* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *е разходящ, то и* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *е разходящ.*

Теорема 1.5 ни казва, че ако ограничим отдолу един несобствен интеграл с разходящ интеграл, то и даденият интеграл е разходящ.

Теорема 1.6 *Ако* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *е сходящ, то и* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *е сходящ.*

Нека отбележим, че докато теореми 1.4 и 1.5 са в сила само когато функциите $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни, то теорема 1.6 е полезна когато функцията $f(x)$ взема както положителни, така и отрицателни стойности.

II. Интеграли от функции, които имат особеност

Случай 1 - $f(x)$ *има особеност в десния край на интеграционния интервал*

Нека $\varepsilon > 0$. Тогава в интервала $[\,a, b-\varepsilon\,]$ определеният интеграл $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ съществува и по дефиниция

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Ако границата в дясната страна на равенството съществува се казва, че несобсвеният интеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ е сходящ. В противен случай се казва, че интегралът е разходящ.

Случай 2 - $f(x)$ *има особеност в левия край на интеграционния интервал*

Нека $\varepsilon > 0$. Тогава в интервала $[\,a+\varepsilon, b\,]$ определеният интеграл $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ съществува и по дефиниция

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Аналогично на предишния случай, ако границата в дясната страна на равенството съществува се казва, че несобсвеният интеграл е сходящ. В противен случай се казва, че интегралът е разходящ.

Случай 3 - $f(x)$ *има особеност във вътрешна точка* $x = c$ *от интервала*

Този случай свеждаме до предишните два, като интегралът се представя като сума на два интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

1.55 $\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-x}\;\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$

$\displaystyle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{\varepsilon}+2\right) = 2$

1.56 $\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\;\Big|_\varepsilon^1\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$ т.е.

интегралът е разходящ.

1.57 $\displaystyle \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\;\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = \infty,$ т.е.

интегралът е разходящ.

1.58 Интегралът $\displaystyle \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\;\Big|_{-1}^{1}\right) = -1-1 = -2$ е пресметнат грешно,

защото не е съобразено, че той има особеност в нулата. По дефиниция

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

и от предните две задачи следва, че той е разходящ.

И в случая на интеграли от функции, които имат особеност, са в сила теореми, аналогични на теореми 1.4 - 1.6.

Интеграл, зависещ от параметър

Да разгледаме интеграла

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx \tag{1.12}$$

Този интеграл е функция на параметъра α, защото ако α се мени, ще се изменя и стойността на интеграла. В следващата теорема ще докажем, че диференцирането на (1.12) относно параметъра α е равно на интегрирането на производната на функцията $f(x,\alpha)$ относно параметъра, т.е. на $f'_\alpha(x,\alpha)$.

Теорема 1.7 ***(формула на Лайбниц)*** *Ако функциите $f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$ са непрекъснати при $x \in [a,b]$ и $\alpha \in [c,d]$, то*

$$I'_\alpha(\alpha) = \left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx \tag{1.13}$$

Доказателство: Имаме

$$I'_\alpha(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha}$$

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \frac{1}{\Delta\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,dx - \int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right] =$$

$$= \int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx$$

За подинтегралната функция в последния интеграл прилагаме теоремата на Лагранж.

$$\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)}{\Delta\alpha} = f'_\alpha(x,\beta) \qquad \beta \in (c,d)$$

Но по условие функцията $f'_\alpha(x,\alpha)$ е непрекъсната и следователно

$$f'_\alpha(x,\beta) = f'_\alpha(x,\alpha) + \varepsilon \qquad \varepsilon \to 0, \text{ когато } \Delta\alpha \to 0$$

Тогава

$$\frac{I(\alpha+\Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b (f'_\alpha(x,\alpha) + \varepsilon)\,dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + \int_a^b \varepsilon\,dx =$$

$$= \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + (b-a)\varepsilon \tag{1.14}$$

В (1.14) извършваме граничен преход при $\Delta\alpha \to 0$ (т.е. $\varepsilon \to 0$) и получаваме

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

■

Глава 2

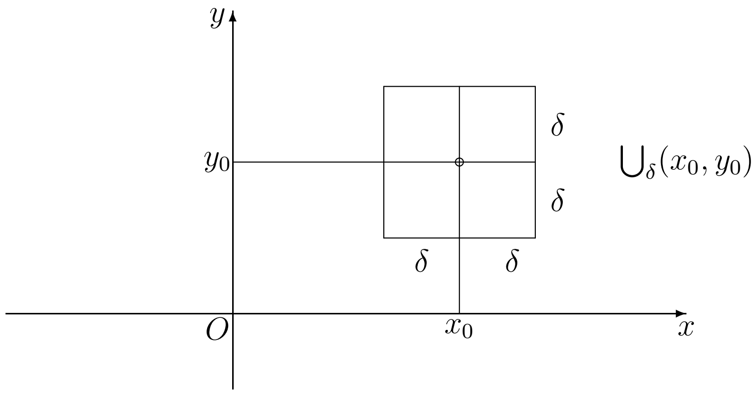
Функция на две променливи

Целта на тази глава е да запознае читателя с понятията функция на две променливи, частни производни и намирането на локалните екстремуми на функции на две променливи.

Дефиниция 2.1 *Нека* D *е област в равнината* Oxy*. Ако на всяка точка* $(x, y) \in D$ *е съпоставено определено число* $z = f(x, y)$*, казваме че е зададена функция на две променливи.*

Графиката на функция на две променливи е повърхнина, чиято проекция върху равнината Oxy е областта D, която наричаме дефиниционна област на функцията.

Дефиниция 2.2 δ*-* ***околност*** *на точката* (x_0, y_0) *наричаме множеството от всички точки* (x, y) *в квадрата със страна* 2δ*, за който точката* (x_0, y_0) *е пресечна точка на диагоналите му, т.е. тя е центъра на квадрата.*



Такава околност ще означаваме с $\bigcup_\delta(x_0, y_0)$.

В следващите редове ще изложим накратко основните понятия и дефиниции, следвайки аналогичното изложение при функция на една променлива, т.е. ще дефинираме понятията граница на редица от точки в равнината, граница на функция на две променливи и непрекъснатост на такава функция. Това ще ни позволи да въведем след това основното понятие - частни производни.

Относно областта D точките в равнината Oxy са вътрешни, външни и контурни. Вътрешни са тези точки, за които съществува тяхна δ-околност, такава че всяка точка от тази околност лежи в D. Външни са тези точки, за които съществува тяхна δ-околност, такава че всяка точка от тази околност не лежи в D. Контурни са тези точки, за които всяка тяхна δ-околност съдържа както вътрешни, така и външни точки. Множеството от контурните точки се нарича контур на областта. Една област D се нарича отворено множество, ако съдържа само вътрешни точки и затворено, ако съдържа и всичките си контурни точки.

Областта D се нарича ограничена, ако съществува число M, такова че разстоянието от началото на координатната система до коя да е точка от областта да е по-малко от M. Всяко ограничено и затворено множество се нарича компактно.

Нека е дадена редица от точки

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), \ldots, P_n(x_n, y_n), \ldots \tag{2.1}$$

Дефиниция 2.3 *Казваме, че редицата от точки (2.1) клони към точката* $P_0(x_0, y_0)$, *ако*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

Дефиницията ни казва, че една редица от точки в равнината (x, y) има за граница точката (x_0, y_0) само тогава, когато съответната редица от разстояния между точката (x_0, y_0) и точките от редицата има граница нула. Ще означаваме с

$$\{(x, y)\} \longrightarrow (x_0, y_0) \qquad \text{или} \qquad \begin{array}{l} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{array}$$

Сега можем да дефинираме понятието граница на функция на две променливи, т.е.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

Дефиниция 2.4 *Казваме, че числото* A *е граница на функцията* $f(x, y)$, *когато* $x \to x_0, y \to y_0$ *и пишем*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A,$$

ако за всяка редица от точки (x_n, y_n), *клоняща към точката* (x_0, y_0), *съответната редица от функционални стойности* $z_n = f(x_n, y_n)$ *има граница* A.

Ако в дефиниция 2.4 $(x_0, y_0) \in D$ и $A = f(x_0, y_0)$, казваме че функцията е непрекъсната в точката (x_0, y_0). Нека $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$, а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Очевидно е, че

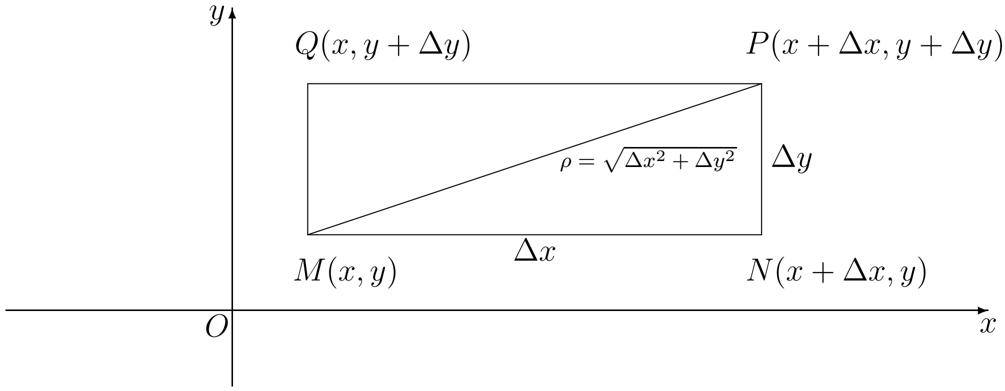
$$\begin{array}{l} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{array} \iff \begin{array}{l} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{array} \iff \rho \to 0$$

Дефиниция 2.5 *Казваме, че функцията* $f(x, y)$ *е непрекъсната в точката* $(x_0, y_0) \in D$, *ако*

$$\lim_{\rho\to 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

Частни производни

При функция на две променливи $z = f(x, y)$ можем да дефинираме три вида нарастване на функцията: $\Delta_x z-$ нарастване относно x, $\Delta_y z-$ нарастване относно y и пълно нарастване на функцията Δz.



Ако е дадена точката $M(x, y)$ и променливата x се измени с Δx, то ще получим точката $N(x + \Delta x, y)$. Разликата от стойностите на функцията в тези две точки се нарича нарастване на функцията относно x и се бележи с $\Delta_x z$

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Аналогично, ако е дадена точката $M(x, y)$ и променливата y се измени с Δy, то ще получим точката $Q(x, y + \Delta y)$. Разликата от стойностите на функцията в тези две точки се нарича нарастване на функцията относно y и се бележи с $\Delta_y z$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Пълното нарастване на функцията се получава като от стойността на функцията в точката $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$ извадим стойността на функцията в точката $M(x, y)$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Дефиниция 2.6 *Частна производна на функцията $z = z(x, y)$ относно променливата x наричаме*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

и означаваме с z'_x или $f'_x(x, y)$ или $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

Дефиниция 2.7 *Частна производна на функцията $z = z(x, y)$ относно променливата y наричаме*

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

и означаваме с z'_y или $f'_y(x, y)$ или $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$

Дефиниции 2.6 и 2.7 ни показват, че намирането на частните производни става по познатите ни правила. Когато търсим частна производна спрямо променливата x, прилагаме правилата спрямо тази променлива, а y считаме за константа.

Когато търсим частна производна спрямо променливата y, прилагаме правилата спрямо нея, а x е константа.

2.1 Намерете частните производни на функцията

$$z = 2x^4y^3 + 5x^2y^2 - 3xy + x - 2y + 1$$

Решение:

$$z'_x = 2y^3(x^4)'_x + 5y^2(x^2)'_x - 3y(x)'_x + (x)'_x - 0 + 0 = 2y^3(4x^3) + 5y^2(2x) - 3y + 1 =$$
$$= 8x^3y^3 + 10xy^2 - 3y + 1,$$

$$z'_y = 2x^4(y^3)'_y + 5x^2(y^2)'_y - 3x(y)'_y + 0 - 2(y)'_y + 0 = 2x^4(3y^2) + 5x^2(2y) - 3x - 2 =$$
$$= 6x^4y^2 + 10x^2y - 3x - 2$$

2.2 Намерете частните производни на функцията

$$z = \ln(x^2y + 1)$$

Решение:

$$z'_x = \frac{1}{x^2y+1}(x^2y+1)'_x = \frac{1}{x^2y+1}(y(x^2)'_x + 0) = \frac{2xy}{x^2y+1},$$

$$z'_y = \frac{1}{x^2y+1}(x^2y+1)'_y = \frac{1}{x^2y+1}(x^2(y)'_y + 0) = \frac{x^2}{x^2y+1}$$

2.3 Намерете частните производни на функцията

$$z = \sin(2x^3y^2 - 5)$$

Решение:

$$z'_x = \cos(2x^3y^2-5).(2x^3y^2-5)'_x = (2y^2(x^3)'_x-0).\cos(2x^3y^2-5) = 6x^2y^2.\cos(2x^3y^2-5),$$

$$z'_y = \cos(2x^3y^2-5).(2x^3y^2-5)'_y = (2x^3(y^2)'_y-0).\cos(2x^3y^2-5) = 4x^3y.\cos(2x^3y^2-5)$$

2.4 Намерете частните производни на функцията

$$z = e^{3x^4y^2}$$

Решение:

$$z'_x = \left(e^{3x^4y^2}\right)'_x = e^{3x^4y^2}.(3x^4y^2)'_x = e^{3x^4y^2}.3y^2.(x^4)'_x = 12x^3y^2.e^{3x^4y^2}$$

$$z'_y = \left(e^{3x^4y^2}\right)'_y = e^{3x^4y^2}.(3x^4y^2)'_y = e^{3x^4y^2}.3x^4.(y^2)'_y = 6x^4y.e^{3x^4y^2}$$

2.5 Намерете частните производни на функцията

$$z = (x^2y^5 + 1)e^{xy^2}$$

Решение:

$$z'_x = (x^2y^5 + 1)'_x.e^{xy^2} + (x^2y^5 + 1).\left(e^{xy^2}\right)'_x = (2xy^5)e^{xy^2} + (x^2y^5 + 1).y^2.e^{xy^2} =$$

$$= e^{xy^2}(2xy^5 + x^2y^7 + y^2)$$

$$z'_y = (x^2y^5 + 1)'_y.e^{xy^2} + (x^2y^5 + 1).\left(e^{xy^2}\right)'_y = (5x^2y^4)e^{xy^2} + (x^2y^5 + 1).2xy.e^{xy^2} =$$

$$= e^{xy^2}(5x^2y^4 + 2x^3y^6 + 2xy)$$

2.6 Намерете частните производни на функцията

$$z = \frac{x^3y}{x^2 + y^2}$$

Решение:

$$z'_x = \frac{(x^3y)'_x(x^2 + y^2) - x^3y(x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y(x^2 + y^2) - 2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z'_y = \frac{(x^3y)'_y(x^2 + y^2) - x^3y(x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3(x^2 + y^2) - 2x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Частните производни на дадена функция се наричат още **първи частни производни** на тази функция. От разгледаните примери се вижда, че първите частни производни са отново функции на две променливи. Следователно и на тях можем да намерим частните производни относно x или относно y. Така достигаме до понятието **втора частна производна**. Ясно е, че те са четири на брой.

Нека е дадена функцията $z = f(x, y)$.

Ако на нейната първа частна производна спрямо променливата x намерим пак първата частна производна относно променливата x, то получената втора частна производна бележим по някой от следните начини:

$$z''_{xx}(x, y), \qquad f''_{xx}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \qquad \text{т.е.} \quad z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x$$

Частната производна относно променливата y на първата частна производна на функцията спрямо променливата x е втора частна производна, която бележим по някой от следните начини:

$$z''_{xy}(x,y), \qquad f''_{xy}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \qquad \text{т.е.} \quad z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y$$

Аналогично се получават и другите две втори частни производни:

$$z''_{yx}(x,y), \qquad f''_{yx}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y), \qquad \text{т.е.} \quad z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x$$

$$z''_{yy}(x,y), \qquad f''_{yy}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \qquad \text{т.е.} \quad z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y$$

2.7 Намерете първите и вторите частни производни на функцията

$$z = 2x^3y^5 + 5x^2y^3 - xy$$

Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= 6x^2y^5 + 10xy^3 - y \\ z'_y &= 10x^3y^4 + 15x^2y^2 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} = (z'_x)'_x &= (6x^2y^5 + 10xy^3 - y)'_x &= 12xy^5 + 10y^3 \\ z''_{xy} = (z'_x)'_y &= (6x^2y^5 + 10xy^3 - y)'_y &= 30x^2y^4 + 30xy^2 - 1 \\ z''_{yx} = (z'_y)'_x &= (10x^3y^4 + 15x^2y^2 - x)'_x &= 30x^2y^4 + 30xy^2 - 1 \\ z''_{yy} = (z'_y)'_y &= (10x^3y^4 + 15x^2y^2 - x)'_y &= 40x^3y^3 + 30x^2y \end{aligned}$$

2.8 Намерете първите и вторите частни производни на функцията

$$z = e^{2xy^2}$$

Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= e^{2xy^2}.(2xy^2)'_x &= 2y^2.e^{2xy^2} \\ z'_y &= e^{2xy^2}.(2xy^2)'_y &= 4xy.e^{2xy^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} = (z'_x)'_x &= \left(2y^2.e^{2xy^2}\right)'_x &= 4y^4.e^{2xy^2} \\ z''_{xy} = (z'_x)'_y &= \left(2y^2.e^{2xy^2}\right)'_y &= (4y + 8xy^3)e^{2xy^2} \\ z''_{yx} = (z'_y)'_x &= \left(4xy.e^{2xy^2}\right)'_x &= (4y + 8xy^3)e^{2xy^2} \\ z''_{yy} = (z'_y)'_y &= \left(4xy.e^{2xy^2}\right)'_y &= 4x(1 + 4xy^2)e^{2xy^2} \end{aligned}$$

2.9 Намерете първите и вторите частни производни на функцията

$$z = \ln(x^2y^3 + 2)$$

Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= \tfrac{2xy^3}{x^2y^3+2} \\ z'_y &= \tfrac{3x^2y^2}{x^2y^3+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z''_{xx} = (z'_x)'_x &= \left(\tfrac{2xy^3}{x^2y^3+2}\right)'_x &= \tfrac{2y^3(x^2y^3+2)-2xy^3.2xy^3}{(x^2y^3+2)^2} = \tfrac{4y^3-2x^2y^6}{(x^2y^3+2)^2} \\ z''_{xy} = (z'_x)'_y &= \left(\tfrac{2xy^3}{x^2y^3+2}\right)'_y &= \tfrac{6xy^2(x^2y^3+2)-2xy^3.3x^2y^2}{(x^2y^3+2)^2} = \tfrac{12xy^2}{(x^2y^3+2)^2} \\ z''_{yx} = (z'_y)'_x &= \left(\tfrac{3x^2y^2}{x^2y^3+2}\right)'_x &= \tfrac{6xy^2(x^2y^3+2)-3x^2y^2.2xy^3}{(x^2y^3+2)^2} = \tfrac{12xy^2}{(x^2y^3+2)^2} \\ z''_{yy} = (z'_y)'_y &= \left(\tfrac{3x^2y^2}{x^2y^3+2}\right)'_y &= \tfrac{6x^2y(x^2y^3+2)-3x^2y^2.3x^2y^2}{(x^2y^3+2)^2} = \tfrac{12x^2y-3x^4y^4}{(x^2y^3+2)^2} \end{aligned}$$

Забелязваме, че и в трите примера вторите смесени частни производни са равни. Това е така, защото е в сила следната теорема:

Теорема 2.1 *Ако функцията $z = f(x, y)$ и нейните частни производни f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} са непрекъснати в дадена точка (x_0, y_0), то $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Доказателство: Нека $f(M) = f(x_0, y_0)$, $f(N) = f(x_0+\Delta x, y_0)$, $f(Q) = f(x_0, y_0+\Delta y)$ и $f(P) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. (Виж чертежа на стр. 27).

Да разгледаме следните два израза:

$$A = [f(P) - f(Q)] - [f(N) - f(M)]$$

$$B = [f(P) - f(N)] - [f(Q) - f(M)]$$

Очевидно е, че

$$A = B$$

Да разпишем подробно втория израз

$$B = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

и да разледаме функцията на една променлива

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$$

Тогава

$$B = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$$

Сега можем да преобразуваме този израз като приложим два пъти теоремата на Лагранж ($f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad c \in (a, b)$). Получаваме:

$$B = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(c_1)(x_0 + \Delta x - x_0) = \varphi'_x(c_1)\Delta x =$$

$$= [f'_x(c_1, y_0 + \Delta y) - f'_x(c_1, y_0)]\Delta x = f''_{xy}(c_1, c_2).\Delta x.(y_0 + \Delta y - y_0) = f''_{xy}(c_1, c_2)\Delta x \Delta y,$$

където $c_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, а $c_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

Аналогично чрез въвеждане на функцията $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$ получаваме:

$$A = \psi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0) = \psi'_y(c_3)(y_0 + \Delta y - y_0) = \psi'_y(c_3)\Delta y =$$
$$= [f'_y(x_0 + \Delta x, c_3) - f'_y(x_0, c_3)]\Delta y = f''_{yx}(c_4, c_3).\Delta y.(x_0 + \Delta x - x_0) = f''_{yx}(c_4, c_3)\Delta y \Delta x,$$

където $c_4 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$, а $c_3 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

Но $A = B$ и следователно

$$f''_{xy}(c_1, c_2)\Delta x \Delta y = f''_{yx}(c_4, c_3)\Delta y \Delta x$$

$$\Rightarrow \qquad f''_{xy}(c_1, c_2) = f''_{yx}(c_4, c_3)$$

Ако $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то c_1 и $c_4 \to x_0$, а c_2 и $c_3 \to y_0$. Следователно

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

■

Аналогично на вторите частни производни могат да се разглеждат и производни от по-висок ред. Например, частните производни от трети ред са осем:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z'''_{xxx} = (z''_{xx})'_x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = z'''_{xxy} = (z''_{xx})'_y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = z'''_{xyx} = (z''_{xy})'_x$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z'''_{xyy} = (z''_{xy})'_y, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = z'''_{yxx} = (z''_{yx})'_x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = z'''_{yxy} = (z''_{yx})'_y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = z'''_{yyx} = (z''_{yy})'_x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z'''_{yyy} = (z''_{yy})'_y$$

2.10 Намерете $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ на функцията $z = 2x^4y^3 + 5x^2y^2$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = (2x^4y^3 + 5x^2y^2)'_x = 8x^3y^3 + 10xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = (z'_x)'_y = (8x^3y^3 + 10xy^2)'_y = 24x^3y^2 + 20xy,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z'''_{xyy} = (z''_{xy})'_y = (24x^3y^2 + 20xy)'_y = 48x^3y + 20x$$

Диференцируемост. Диференциал

Нека функцията $z = f(x, y)$ има непрекъснати първи частни производни в точката (x, y). Да разгледаме пълното нарастване $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$. Чрез прибавяне и изваждане на $f(x, y+\Delta y)$ и прилагане теоремата на Лагранж, това нарастване можем да представим по следния начин:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) =$$

$$= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] =$$
$$= f'_x(c_1, y + \Delta y).\Delta x + f'_y(x, c_2).\Delta y,$$

където $c_1 \in (x, x + \Delta x)$, а $c_2 \in (y, y + \Delta y)$.

Тъй като първите частни производни са непрекъснати в точката (x, y), то

$$\Delta z = f'_x(c_1, y + \Delta y).\Delta x + f'_y(x, c_2).\Delta y = (f'_x(x, y) + \varepsilon_1).\Delta x + (f'_y(x, y) + \varepsilon_2).\Delta y =$$

$$= f'_x(x, y).\Delta x + f'_y(x, y).\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y,$$

където ε_1 и ε_2 клонят към нула, когато Δx и Δy клонят към нула. И така, имаме

$$\Delta z = f'_x(x, y).\Delta x + f'_y(x, y).\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y \tag{2.2}$$

Можем да разглеждаме нарастването на функцията като сума от две събираеми. Едното е $f'_x(x, y).\Delta x + f'_y(x, y).\Delta y$, а другото $\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$. Първото събираемо е линейно относно нарастванията Δx и Δy, защото частните производни пресметнати в точката (x, y) са числа ($A = f'_x(x, y)$, $B = f'_y(x, y)$), а второто събираемо клони по-бързо към нула, защото ε_1 и ε_2 клонят към нула, т.е.

$$\Delta z = A.\Delta x + B.\Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y \tag{2.3}$$

Дефиниция 2.8 *Ако нарастването на една функция на две променливи може да се представи във вида (2.3), то функцията се нарича* ***диференцируема****.*

С разсъжденията до тук доказахме следната теорема:

Теорема 2.2 *Достатъчно условие една функция на две променливи да бъде диференцируема в точката (x, y) е тя да има непрекъснати частни производни в тази точка.*

Обратно, ако в равенството (2.3) положим $\Delta y = 0$, т.е. фиксираме y, и разделим на Δx ще получим

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \varepsilon_1 \tag{2.4}$$

Извършвайки граничен преход в (2.4) при $\Delta x \to 0$ получаваме, че

$$A = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Аналогично, ако в равенството (2.3) положим $\Delta x = 0$, т.е. фиксираме x, разделим на Δy и извършим граничен преход при $\Delta y \to 0$ получаваме, че

$$B = \lim_{\Delta_y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

т.е. в сила е следната теорема

Теорема 2.3 *Необходимо условие една функция на две променливи да бъде диференцируема в точката* (x, y) *е тя да има частни производни в тази точка.*

Да се върнем за кратко на понятието непрекъснатост на функция в точка. От дефиниция 2.5 следва

$$\lim_{\rho \to 0} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0$$

Но

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \Delta z$$

и дефиницията добива вида

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta z = 0,$$

т.е. на безкрайно малко нарастване на аргументите съответства безкрайно малко изменение на функцията. Сега от (2.3) виждаме, че е в сила следната

Теорема 2.4 *Всяка диференцируема в точката* (x_0, y_0) *функция на две променливи е непрекъсната в тази точка.*

Дефиниция 2.9 *Първото събираемо в равенството (2.3) се нарича* ***първи диференциал*** *и се бележи с* dz, *т.е.*

$$dz = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \cdot \Delta y \tag{2.5}$$

или по-кратко

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y = z'_x.\Delta x + z'_y.\Delta y \tag{2.6}$$

Ако $z = z(x, y) = x$, то от (2.5) следва, че $dx = 1.\Delta x + 0.\Delta y = \Delta x$. Аналогично, ако $z = z(x, y) = y$, то $dy = \Delta y$. Следователно (2.5) можем да запишем по следния начин

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy = z'_x.dx + z'_y.dy \tag{2.7}$$

2.11 Намерете първия диференциал на функцията $z = 3x^5y^2 - 2x^3y$.

Решение:

$$z'_x = (3x^5y^2 - 2x^3y)'_x = 15x^4y^2 - 6x^2y,$$

$$z'_y = (3x^5y^2 - 2x^3y)'_y = 6x^5y - 2x^3,$$

$$\Rightarrow \qquad dz = z'_x.dx + z'_y.dy = (15x^4y^2 - 6x^2y).dx + (6x^5y - 2x^3).dy$$

2.12 Пресметнете разликата между нарастването и първия диференциал на функцията $z = 2x^2y^3$ в точката $(2, 1)$ при нараствания $\Delta x = dx = 0.1$, $\Delta y = dy = 0.2$.

Решение:
1. Имаме $x_0 = 2, y_0 = 1$, $x = x_0 + \Delta x = 2.1$, $y = y_0 + \Delta y = 1.2$

$$\Rightarrow \quad \Delta z = f(2.1, 1.2) - f(2, 1) = 2.(2.1)^2.(1.2)^3 - 2.2^2 =$$

$$= 2(4.41)(1.728) - 8 = 15.241 - 8 = 7.241$$

2.
$$z'_x = (2x^2y^3)'_x = 4xy^3, \quad z'_y = (2x^2y^3)'_y = 6x^2y^2,$$

$$\Rightarrow \quad dz|_{(x_0,y_0)} = z'_x(x_0, y_0).dx + z'_y(x_0, y_0).dy = 4x_0y_0^3.dx + 6x_0^2y_0^2.dy$$

$$\Rightarrow \quad dz|_{(2,1)} = 4.2.(0.1) + 6.2^2.(0.2) = 0.8 + 4.8 = 5.6$$

3.
$$\Rightarrow \quad \Delta z - dz = 7.241 - 5.6 = 1.641$$

Дефиниция 2.10 *Нека $z = f(x, y)$ е диференцируема в точката (x_0, y_0) и $z_0 = f(x_0, y_0)$. Равнината α с уравнение*

$$\alpha : \quad z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) \tag{2.8}$$

се нарича ***допирателна (тангенциална) равнина*** *към повърхнината в точката (x_0, y_0, z_0).*

Но $x - x_0 = \Delta x$ и $y - y_0 = \Delta y$. Следователно в дясната страна на (2.8) стои първият диференциал на функцията в точката (x_0, y_0). От тук следва, че първият диференциал е равен на нарастването на функцията под допирателната равнина.

2.13 Напишете уравнението на допирателната равнина α към повърхнината $z = 2x^2y^3$ в точката с абсциса $x_0 = 2$ и ордината $y_0 = 1$.

Решение:

$$z_0 = z(x_0, y_0) = 2.2^2 = 8, \quad z'_x(x, y) = 4xy^3, \quad z'_y(x, y) = 6x^2y^2,$$

$$z'_x(2, 1) = 4.2 = 8, \quad z'_y(2, 1) = 6.2^2 = 24,$$

$$\Rightarrow \quad \alpha : \ z - 8 = 8(x - 2) + 24(y - 1) \iff \alpha : \ 8x + 24y - z - 32 = 0$$

Да пресметнем апликатата на точката от α, която има координати $x = 2,1$ и $y = 1,2$. Получаваме $z = 8.(2,1)+24.(1,2)-32 = 16,8+28,8-32 = 45,6-32 = 13,6$. Тогава $z - z_0 = 13,6 - 8 = 5,6 = dz|_{(2,1)}$ (*виж предната задача* 2.12).

Ако на първия диференциал намерим пак първия диференциал, получаваме **втория диференциал** на функцията, т.е.

$$d^2z = d(dz) = (z'_x.dx + z'_y.dy)'_x.dx + (z'_x.dx + z'_y.dy)'_y.dy =$$

$$= (z''_{xx}.dx + z''_{yx}.dy).dx + (z''_{xy}.dx + z''_{yy}.dy).dy =$$

$$= z''_{xx}.(dx)^2 + 2z''_{xy}.dx.dy + z''_{yy}.(dy)^2 = z''_{xx}.dx^2 + 2z''_{xy}.dx.dy + z''_{yy}.dy^2$$

2.13 Намерете втория диференциал на функцията $z = x^3y^2$.

Решение:

$$z'_x = (x^3y^2)'_x = 3x^2y^2, \quad z'_y = (x^3y^2)'_y = 2x^3y,$$

$$z''_{xx} = (3x^2y^2)'_x = 6xy^2, \quad z''_{xy} = (3x^2y^2)'_y = 6x^2y, \quad z''_{yy} = (2x^3y)'_y = 2x^3$$

$$\Rightarrow \qquad d^2z = 6xy^2.dx^2 + 12x^2y.dx.dy + 2x^3.dy^2$$

Продължавайки по същия начин ще получим третия, четвъртия и следващите диференциали от по-висок ред - d^3z, d^4z и т.н.

Производна на сложна функция

Нека функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема. Ако $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, то

$$z = z(t) = f(x(t), y(t)),$$

т.е. z е функция на една променлива.
Ще докажем, че

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \tag{2.9}$$

Доказателство: От това, че функцията е диференцируема следва, че

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y \tag{2.10}$$

Разделяме двете страни на равенство (2.10) с Δt и получаваме

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y}{\Delta t} \tag{2.11}$$

Тъй като

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

то равенството (2.9) ще бъде доказано, ако докажем, че

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y}{\Delta t} = 0 \tag{2.12}$$

Преобразуваме $\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y$ по следния начин:

$$\frac{\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y}{\rho} \cdot \rho = \frac{\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{2.13}$$

Ще докажем, че израза $\varepsilon(\rho) = \dfrac{\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ клони към нула, когато Δx и Δy клонят към нула ($\rho \to 0$), т.е. $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon(\rho) = 0$. Наистина,

$$|\varepsilon(\rho)| = \left| \frac{\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| = \left| \varepsilon_1 \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \varepsilon_2 \cdot \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0,$$

защото $\left| \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \le 1$ и $\left| \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \right| \le 1$.

Тъй като функциите $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ са диференцируеми, то те са непрекъснати и на безкрайно малко изменение на t съответстват безкрайно малки изменения на x и y, т.е. от $\Delta t \to 0$ следва, че $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, т.е. $\rho \to 0$. Тогава

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_1.\Delta x + \varepsilon_2.\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\rho).\frac{\rho}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\rho).\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\rho). \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = 0.\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = 0$$

С това доказателството е завършено. ■

Нека функцията $z = f(x, y)$ е диференцируема. Ако $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, то

$$z = z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)),$$

т.е. z е функция на променливите u и v, посредством старите x и y. В този случай може да се докаже, че

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Градиент и производна по посока

Нека $z = f(x, y)$ и $\overrightarrow{s}(\cos\alpha, \cos\beta)$ е единичен вектор.

Дефиниция 2.11 *Векторът*

$$\overrightarrow{grad\, z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \tag{2.14}$$

*се нарича **градиент**, а скаларното произведение на градиента и вектора* $\overrightarrow{s}(\cos\alpha, \cos\beta)$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \overrightarrow{grad\, z}.\overrightarrow{s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \tag{2.15}$$

*се нарича **производна по посока**, оределена от вектора* $\overrightarrow{s}$.

Но както знаем от дефиницията на скаларно призведение (Висша математика, част I), скаларното произведение е равно на произведението от дължината на едини вектор и проекцията на втория върху направлението, определено от първия т.е.

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\text{пр}_{\ a}\ \overrightarrow{b}$$

Следователно

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \overrightarrow{grad\, z}.\overrightarrow{s} = |\overrightarrow{grad\, z}|\text{пр}_{\ grad\, z}\ \overrightarrow{s} \tag{2.16}$$

Очевидно е обаче, че проекцията на вектора $\overrightarrow{s}$ върху оста, определена от градиента ще бъде най-голяма, когато градиентът и $\overrightarrow{s}$ са еднопосочно колинеарни, т.е.

1. Стойността на производната по посока в дадена точка е най-голяма, когато посоката на вектора $\overrightarrow{s}$ съвпада с посоката на градиента и е равна на дължината на градиента.

Тъй като скаларното произведние на два перпендикулярни вектора е равно на нула, то

2. Ако в дадена точка посоката е перпендикулярна на посоката на градиента, то производната е равна на нула.

Нека $z = f(x, y)$ е дефинирана в областта D. Да разгледаме всички точки $(x, y) \in D$, в които $f(x, y) = c$. Множеството от всички такива точки е някаква линия. Ако вземем друга стойност на константата c, то ще получим друга линия. *Тези линии се наричат **линии на ниво** и очевидно е, че това са проекциите върху равнината Oxy на линиите, които се получават от пресичането на повърхнината $z = f(x, y)$ с равнините $z = c$.* Знаейки линиите на ниво, лесно можем да изследваме характера на повърхнината $z = f(x, y)$. Ще покажем, че

3. Градиентът в дадена точка е перпендикулярен на линията на ниво, минаваща през тази точка.

Наистина, нека $M(x_0, y_0)$ е точката от линията на ниво и да въведем означенията $a = f'_x(x_0, y_0)$, $b = f'_y(x_0, y_0)$. Тогава правата g, определена от M и градиента има уравнение $g:\ \ b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$. Следователно ъгловият коефициент на g е

$$k_g = \frac{b}{a} = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{f'_x(x_0, y_0)}.$$

Допирателната към линията на ниво в точката М има уравнение

$$t: \quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Диференцирайки равенството $f(x, y) - c = 0$, получаваме $f'_x + f'_y.y' = 0$. Следователно

$$y' = k_t = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

Очевидно $k_g.k_t = -1$ и твърдението е доказано. ■

2.14 Пресметнете градиента на функцията $z = x^2 + xy^3$ в точката $M(2, 1)$ и производната по посоката, определена от точката М и точка $N(5, 5)$.

Решение: Намираме първите частни производни.

$$z'_x = 2x + y^3$$

$$z'_y = 3xy^2$$

Следователно градиентът има координати $\overrightarrow{grad}(2x + y^3,\ 3xy^2)$. В точката $M(2, 1)$ градиентът е $\overrightarrow{grad}(5, 6)$.

Векторът, определен от двете точки, е $\overrightarrow{MN}(3, 4)$. Неговата дължина е $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Следователно единичният вектор по направление на вектора $\overrightarrow{MN}$ е $\overrightarrow{s}\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Прилагаме формула (2.15) и за производната по посока на вектора $\overrightarrow{s}$ получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \overrightarrow{grad}\, z.\overrightarrow{s} = 5 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{39}{5}.$$

Формула на Тейлър

Преди да изведем формулата на Тейлър за функция на две променливи, ще припомним формулите на Тейлър и на Маклорън за функция на една променлива.
Формула на Тейлър:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)} \qquad c \in (x_0, x)$$

Формула на Маклорън ($x_0 = 0$):

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{(n+1)} \qquad c \in (0, x)$$

Формулата на Тейлър за функция на две променливи изразява нарастването на функцията чрез диференциалите от първи, втори и по-висок ред. За нейното извеждане ще използваме подходяща функция на една променлива и формулата на Маклорън.

Да разгледаме нарастването на функцията $z = f(x, y)$

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{2.17}$$

и функцията на една променлива

$$F(t) = f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y) \tag{2.18}$$

От (2.17) и (2.18) следва, че

$$\Delta z = F(1) - F(0) \tag{2.19}$$

Да приложим за функцията $F(t)$ формулата на Маклорън. Получаваме

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{(n+1)} \quad c \in (0, t) \tag{2.20}$$

При $t = 1$ от (2.20) получаваме, че

$$\Delta z = F(1) - F(0) = F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \quad c \in (0, t) \tag{2.21}$$

Сега остава само да пресметнем $F'(0), \quad F''(0), \quad \cdots \quad , \quad F^{(n)}(0), \quad F^{(n+1)}(c)$.

$$F'(t) = \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial x} \cdot (x_0 + t.\Delta x)'_t + \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial y} \cdot (y_0 + t.\Delta y)'_t =$$

$$= \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Следователно

$$F'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y = d\, f(x_0, y_0),$$

т.е. $F'(0)$ е равна на първия диференциал на функцията, пресметнат в точката (x_0, y_0).

$$F''(t) = \left[\frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial y} \cdot \Delta y\right]'_x \cdot \Delta x +$$

$$+ \left[\frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t.\Delta x, y_0 + t.\Delta y)}{\partial y} \cdot \Delta y\right]'_y \cdot \Delta y =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_0+t.\Delta x, y_0+t.\Delta y)}{\partial x^2}\cdot \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f(x_0+t.\Delta x, y_0+t.\Delta y)}{\partial y \partial x}\cdot \Delta y \cdot \Delta x +$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0+t.\Delta x, y_0+t.\Delta y)}{\partial x \partial y}\cdot \Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0+t.\Delta x, y_0+t.\Delta y)}{\partial y^2}\cdot \Delta y^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x_0+t.\Delta x, y_0+t.\Delta y)}{\partial x^2}\cdot \Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0+t.\Delta x, y_0+t.\Delta y)}{\partial x \partial y}\cdot \Delta x \cdot \Delta y +$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0+t.\Delta x, y_0+t.\Delta y)}{\partial y^2}\cdot \Delta y^2$$

Следователно

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2 = d^{\,2} f(x_0,y_0),$$

т.е. $F''(0)$ е равна на втория диференциал на функцията, пресметнат в точката (x_0, y_0).

Аналогично

$$F'''(0) = d^{\,3} f(x_0,y_0), \quad \cdots \quad , F^{(n)}(0) = d^{\,n} f(x_0,y_0), F^{(n+1)}(c) = d^{\,n+1} f(c_1,c_2),$$

където $c_1 \in (x_0, x),\ c_2 \in (y_0, y)$.

Замествайки в (2.21) получаваме **формулата на Тейлър**

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + d\,f(x_0,y_0) + \frac{d^{\,2} f(x_0,y_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^{\,n} f(x_0,y_0)}{n!} + \frac{d^{\,n+1} f(c_1,c_2)}{(n+1)!} \quad (2.22)$$

Следващата формула е формулата на Тейлър, разписана до втория диференциал

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[\ f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y)\ \right] +$$
$$+\frac{1}{2}\cdot \left[\ f''_{xx}(c_1,c_2)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(c_1,c_2)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(c_1,c_2)\Delta y^2\ \right] \quad (2.23)$$

Екстремум на функция на две променливи

Нека функцията $z = f(x,y)$ е дефинирана в околност на точката (x_0, y_0).

Дефиниция 2.12 *Функцията $z = f(x,y)$ има* ***локален максимум*** *в точката (x_0, y_0), ако съществува околност $\bigcup_\delta(x_0,y_0)$, такава че $\forall (x,y) \in \bigcup_\delta(x_0,y_0)$ е изпълнено $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0$.*

Дефиниция 2.13 *Функцията $z = f(x,y)$ има* ***локален минимум*** *в точката (x_0, y_0), ако съществува околност $\bigcup_\delta(x_0,y_0)$, такава че $\forall (x,y) \in \bigcup_\delta(x_0,y_0)$ е изпълнено $\Delta z = f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$.*

Точките на локални минимуми и локални максимуми се наричат точки на **локални екстремуми.**

Теорема 2.5 ***(Необходимо условие за екстремум)*** *Ако функцията* $z = f(x, y)$ *е диференцируема в точката* (x_0, y_0) *и има локален екстремум в тази точка, то*

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & = & 0 \\ \\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Доказателство: Ако фиксираме променливата $y = y_0$, то функцията $z = f(x, y_0)$ става функция само на променливата x, и за нея е в сила теоремата на Ферма. Следователно производната в точката x_0 е равна на нула, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0.$$

Аналогично, ако фиксираме променливата $x = x_0$, то функцията $z = f(x_0, y)$ става функция само на променливата y, и за нея отново е в сила теоремата на Ферма. Следователно производната спрямо y в точката y_0 е равна на нула, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

■

Точките, в които първите частни производни на функцията се анулират, се наричат **стационарни точки.**

2.15 Намерете стационарните точки на функцията $z = x^2y + 2xy + y^2$.

Решение: Намираме първите частни производни. Те са:

$$z'_x = 2xy + 2y = 2y(x + 1)$$

$$z'_y = x^2 + 2x + 2y$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 2y(x + 1) & = & 0 \\ \\ x^2 + 2x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

От първото уравнение на системата следва, че $y = 0$ или $x + 1 = 0$, т.е. $x = -1$. Следователно трябва да решим следващите две системи:

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ \\ x^2 + 2x + 2y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ \\ x^2 + 2x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

и след това да обединим решенията им.

Първата система има две решения $x = 0, y = 0$ и $x = -2, y = 0$, а втората само едно $x = -1, y = \frac{1}{2}$. Следователно функцията има три стационарни точки:

$$M(0,0), \qquad N(-2,0) \quad \text{и} \quad P\left(-1, \frac{1}{2}\right).$$

Теорема 2.6 ***(Достатъчно условие за екстремум)*** *Нека функцията $z = f(x,y)$ има непрекъснати частни производни до втори ред и точката $M(x_0, y_0)$ е стационарна точка. Въвеждаме означенията:*

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \qquad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \qquad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

1) Ако $\Delta > 0$, функцията има екстремум в точката $M(x_0, y_0)$ и
- ако $A < 0$, този екстремум е ***локален максимум***
- ако $A > 0$, този екстремум е ***локален минимум***

2) Ако $\Delta < 0$, функцията няма екстремум в точката $M(x_0, y_0)$.

3) Ако $\Delta = 0$, са необходими допълнителни изследвания.

Доказателство:
Прилагаме формулата на Тейлър до втория диференциал, отчитайки че точката $M(x_0, y_0)$ е стационарна (*първият диференциал в тази точка е равен на нула*). Получаваме

$$\Delta z = \frac{1}{2}\left[\ f''_{xx}(c_1, c_2)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(c_1, c_2)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(c_1, c_2)\Delta y^2\ \right] \tag{2.25}$$

Тъй като вторите частни производни са непрекъснати, имаме:

$$f''_{xx}(c_1, c_2) = f''_{xx}(x_0, y_0) + \varepsilon_1 = A + \varepsilon_1 \tag{2.26}$$

$$f''_{xy}(c_1, c_2) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \varepsilon_2 = B + \varepsilon_2 \tag{2.27}$$

$$f''_{yy}(c_1, c_2) = f''_{yy}(x_0, y_0) + \varepsilon_3 = C + \varepsilon_3, \tag{2.28}$$

където $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ клонят към нула, когато $\rho \to 0$.

Заместваме в (2.25) $f''_{xx}(c_1, c_2), f''_{xy}(c_1, c_2), f''_{yy}(c_1, c_2)$ съгласно (2.26), (2.27), (2.28) и получаваме:

$$\Delta z = \frac{1}{2}\left[\ (A + \varepsilon_1)\Delta x^2 + 2(B + \varepsilon_2)\Delta x \Delta y + (C + \varepsilon_3)\Delta y^2\ \right] \tag{2.29}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta z = \frac{1}{2}\left[\ A\Delta x^2 + 2B\Delta x \Delta y + C\Delta y^2\ \right] + \frac{1}{2}\left[\ \varepsilon_1 \Delta x^2 + 2\varepsilon_2 \Delta x \Delta y + \varepsilon_3 \Delta y^2\ \right] \tag{2.30}$$

Второто събираемо в (2.30) клони бързо към нула и следователно знакът на Δz се определя от първото събираемо (да го означим с L)

$$L = \frac{1}{2}\left[\ A.\Delta x^2 + 2B.\Delta x.\Delta y + C.\Delta y^2\ \right] \tag{2.31}$$

Преобразуваме L по следния начин ($A \neq 0$):

$$L = \frac{1}{2A}\left[\ A^2.\Delta x^2 + 2A.B.\Delta x.\Delta y + A.C.\Delta y^2\ \right] =$$

$$= \frac{1}{2A}\left[\ A^2.\Delta x^2 + 2A.B.\Delta x.\Delta y + B^2\Delta y^2 - B^2\Delta y^2 + A.C.\Delta y^2\ \right] =$$

$$= \frac{1}{2A}\left[\ (A.\Delta x + B.\Delta y)^2 + (A.C - B^2)\Delta y^2\ \right] = \frac{1}{2A}\left[\ (A.\Delta x + B.\Delta y)^2 + \Delta.\Delta y^2\ \right]$$

И така

$$L = \frac{1}{2A}\left[\ (A.\Delta x + B.\Delta y)^2 + \Delta.\Delta y^2\ \right] \tag{2.32}$$

1) Ако $\Delta > 0$, то в средните скоби имаме сума от две неотрицателни събираеми и следователно знакът на L ще се определя от коефициента пред скобата $\frac{1}{2A}$, т.е. от A.

- Ако $A < 0$, то $L \leq 0$, т.е. $\Delta z \leq 0$. Следователно функцията има локален максимум в точката $M(x_0, y_0)$.

- Ако $A > 0$, то $L \geq 0$, т.е. $\Delta z \geq 0$. Следователно функцията има локален минимум в точката $M(x_0, y_0)$.

2) Ако $\Delta < 0$, то в средните скоби имаме разлика от две неотрицателни събираеми и може да се покаже, че движейки се по различни начини към точка $M(x_0, y_0)$, знакът на L ще се сменя и следователно функцията няма да има екстремум в точката $M(x_0, y_0)$. В този случай се казва, че точката $M(x_0, y_0)$ е **седловидна точка**.

3) Ако $\Delta = 0$, са необходими допълнителни изследвания чрез използване формулата на Тейлър до диференциали от по-висок ред или други начини. ■

2.16 Да се изследва за локални екстремуми функцията $z(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x - 5y - 3$.

Решение: Намираме първите и вторите частни производни. Те са:

$$z'_x = 2x - y + 1$$

$$z'_y = -x + 2y - 5$$

$$\begin{array}{ll} A: & z''_{xx} = 2 \\ B: & z''_{xy} = -1 \\ C: & z''_{yy} = 2 \end{array}$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x - y + 1 & = & 0 \\ \\ -x + 2y - 5 & = & 0 \end{array} \right.$$

От първото уравнение на системата следва, че $y = 2x + 1$ и замествайки във второто получаваме $-x + 4x + 2 - 5 = 0$, т.е. $x = 1$. Следователно $y = 2 + 1 = 3$. Получихме, че функцията има само една стационарна точка $M(1, 3)$.

До тук използвахме теорема 2.5. Сега трябва да използваме теорема 2.6. За тази цел пресмятаме вторите частни производни в стационарната точка (в нашия случай те не зависят от x и y)

$$A = z''_{xx}(1,3) = 2, \qquad B = z''_{xy}(1,3) = -1, \qquad C = z''_{yy}(1,3) = 2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

Следователно функцията има екстремум. От $A = z''_{xx}(1,3) = 2 > 0$ следва, че в точката $M(1,3)$ имаме локален минимум. Стойността на този минимум е $z_{min} = z(1,3) = 1^2 - 3 + 3^2 + 1 - 15 - 3 = 11 - 21 = -10$.

2.17 Да се изследва за локални екстремуми функцията $z(x, y) = x^2y + 4xy + y^2 + 2$.

Решение: Намираме първите и вторите частни производни:

$$z'_x = 2xy + 4y = 2y(x + 2)$$

$$z'_y = x^2 + 4x + 2y$$

$$\begin{array}{ll} A: & z''_{xx} = (2xy + 4y)'_x = 2y \\ B: & z''_{xy} = (2xy + 4y)'_y = 2x + 4 \\ C: & z''_{yy} = (x^2 + 4x + 2y)'_y = 2 \end{array}$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 2y(x+2) & = & 0 \\ x^2 + 4x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

От първото уравнение на системата следва, че $y = 0$ или $x + 2 = 0$, т.е. $x = -2$. Следователно трябва да решим следващите две системи

$$\left| \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x^2 + 4x + 2y & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{и} \qquad \left| \begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ x^2 + 4x + 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

и след това да обединим решенията им.

Първата система има две решения $x = 0, y = 0$ и $x = -4, y = 0$, а втората само едно $x = -2, y = 2$. Следователно функцията има три стационарни точки

$$M(0,0), \qquad N(-4,0) \quad \text{и} \quad P(-2,2).$$

Остава само да приложим теорема 2.6 за всяка от тези точки.

1. <u>За точката $M(0,0)$ имаме:</u>

$$A = z''_{xx}(0,0) = 2.0 = 0, \qquad B = z''_{xy}(0,0) = 2.0 + 4 = 4, \qquad C = z''_{yy}(0,0) = 2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 16 = -16 < 0$$

Следователно в тази точка функцията няма екстремум.

2. <u>За точката $N(-4,0)$ имаме:</u>

$$A = z''_{xx}(-4,0) = 2.0 = 0, \qquad B = z''_{xy}(-4,0) = 2.(-4) + 4 = -8 + 4 = -4,$$
$$C = z''_{yy}(-4,0) = 2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-4)(-4) = -16 < 0$$

Следователно и в тази точка функцията няма екстремум.

3. <u>За точката $P(-2,2)$ имаме:</u>

$$A = z''_{xx}(-2,2) = 2.2 = 4, \qquad B = z''_{xy}(-2,2) = -4 + 4 = 0, \qquad C = z''_{yy}(-2,2) = 2,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 = 8 > 0$$

Следователно в тази точка функцията има екстремум. От $A = 4 > 0$ следва, че той е локален минимум.

2.18 Да се изследва за локални екстремуми функцията $z(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: Намираме първите и вторите частни производни:

$$z'_x = 3x^2 - 3y$$

$$z'_y = 3y^2 - 3x$$

$$\begin{array}{rl} A: & z''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x \\ B: & z''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3 \\ C: & z''_{yy} = (3y^2 - 3x)'_y = 6y \end{array}$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y & = & 0 \\ 3y^2 - 3x & = & 0 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left| \begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 0 \\ y^2 - x & = & 0 \end{array} \right.$$

Изразяваме от първото уравнение $y = x^2$, заместваме във второто и получаваме

$$x^4 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Следователно или $x = 0$, или $x = 1$, или $x^2 + x + 1 = 0$. Последното квадратно уравнение няма реални корени, защото дискриминантата му е отрицателна. От $y = x^2$ следва, че функцията има две стационарни точки

$$M(0,0) \quad \text{и} \quad N(1,1).$$

Прилагаме теорема 2.6 за всяка от точките.

1. <u>За точката $M(0,0)$ имаме:</u>

$$A = z''_{xx}(0,0) = 6.0 = 0, \qquad B = z''_{xy}(0,0) = -3, \qquad C = z''_{yy}(0,0) = 6.0 = 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-3)(-3) = -9 < 0$$

Следователно в тази точка функцията няма екстремум.

2. <u>За точката $N(1,1)$ имаме:</u>

$$A = z''_{xx}(1,1) = 6, \qquad B = z''_{xy}(1,1) = -3, \qquad C = z''_{yy}(1,1) = 6,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - (-3)(-3) = 36 - 9 = 27 > 0$$

Следователно в тази точка функцията има екстремум. От $A = 6 > 0$ следва, че той е локален минимум.

2.19 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = 2x^3 - 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 6xy - 5$$

Решение: Намираме първите и вторите частни производни:

$$z'_x = 6x^2 - 6x + 6y$$

$$z'_y = -6y^2 - 6y + 6x$$

$$\begin{array}{ll} A: & z''_{xx} = (6x^2 - 6x + 6y)'_x = 12x - 6 \\ B: & z''_{xy} = (6x^2 - 6x + 6y)'_y = 6 \\ C: & z''_{yy} = (-6y^2 - 6y + 6x)'_y = -12y - 6 \end{array}$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 6x^2 - 6x + 6y & = & 0 \\ -6y^2 - 6y + 6x & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} x^2 - x + y & = & 0 \\ -y^2 - y + x & = & 0 \end{array} \right.$$

Събираме почленно двете уравнения на системата и получаваме

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0,$$

т.е. или $x = y$ или $x = -y$. Следователно трябва да решим следващите две системи

$$\left| \begin{array}{rcl} x & = & y \\ \\ x^2 - x + y & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ \\ x^2 - x + y & = & 0 \end{array} \right.$$

и след това да обединим решенията им.

Първата система има само нулевото решение $x = y = 0$, а втората нулевото и $x = 2, y = -2$. Следователно функцията има две стационарни точки

$$M(0,0) \quad \text{и} \quad N(2,-2).$$

Прилагаме теорема 2.6 за всяка от точките.

1. <u>За точката $M(0,0)$ имаме:</u>

$A = z''_{xx}(0,0) = 12.0 - 6 = -6, \quad B = z''_{xy}(0,0) = 6, \quad C = z''_{yy}(0,0) = -12.0 - 6 = -6,$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$$

Следователно са необходими допълнителни изследвания.

2. <u>За точката $N(2,-2)$ имаме:</u> $A = z''_{xx}(2,-2) = 12.2 - 6 = 18,$

$$B = z''_{xy}(2,-2) = 6, \qquad C = z''_{yy}(2,-2) = -12.(-2) - 6 = 18,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} = 18^2 - 36 > 0$$

Следователно в тази точка функцията има екстремум. От $A = 18 > 0$ следва, че той е локален минимум.

2.20 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y.$$

Решение: Намираме първите и вторите частни производни:

$$z'_x = 6xy - 18$$

$$z'_y = 3x^2 + 3y^2 - 30$$

$$\begin{array}{ll} A: & z''_{xx} = (6xy - 18)'_x = 6y \\ B: & z''_{xy} = (6xy - 18)'_y = 6x \\ C: & z''_{yy} = (3x^2 + 3y^2 - 30)'_y = 6y \end{array}$$

Стационарните точки ще намерим като решим системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 6xy-18 & = & 0 \\ \\ 3x^2+3y^2-30 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} xy-3 & = & 0 \\ \\ x^2+y^2-10 & = & 0 \end{array} \right.$$

Изразяваме от първото уравнение на системата $y = \frac{3}{x}$ и заместваме във второто уравнение. Получаваме

$$x^2 + \frac{9}{x^2} - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Това е биквадратно уравнение. Чрез полагането $x^2 = t$, то се свежда до квадратното уравнение $t^2 - 10t + 9 = 0$, което има две решения $t = 1$ и $t = 9$. Следователно $x = \pm 1$ и $x = \pm 3$. От полагането $y = \dfrac{3}{x}$ виждаме, че когато $x = \pm 1$, съответните стойности на y са $y = \pm 3$, а когато $x = \pm 3$, съответните стойности на y са $y = \pm 1$.

Получихме, че функцията има четири стационарни точки

$$M(1,3), \qquad N(-1,-3), \qquad P(3,1), \qquad M(-3,-1).$$

Прилагаме теорема 2.6 за всяка от точките.

1. За точката $M(1,3)$ имаме:

$$A = z''_{xx}(1,3) = 6.3 = 18, \qquad B = z''_{xy}(1,3) = 6.1 = 6, \qquad C = z''_{yy}(1,3) = 6.3 = 18,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} = 18^2 - 36 > 0$$

Следователно в тази точка функцията има екстремум. От $A = 18 > 0$ следва, че той е локален минимум. Стойността на минимума е $z_{min} = z(1,3) = 3.3 + 3^3 - 18 - 90 = -72$.

2. За точката $N(-1,-3)$ имаме: $\qquad A = z''_{xx}(-1,-3) = 6.(-3) = -18,$

$$B = z''_{xy}(-1,-3) = 6.(-1) = -6, \qquad C = z''_{yy}(-1,-3) = 6.(-3) = -18,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -18 & -6 \\ -6 & -18 \end{vmatrix} = 18^2 - 36 > 0$$

Следователно в тази точка функцията има екстремум. От $A = -18 < 0$ следва, че той е локален максимум. Стойността на максимума е $z_{max} = z(-1,-3) = 3.(-3) + (-3^3) + 18 + 90 = -9 - 27 + 108 = 72$.

3. За точката $P(3,1)$ имаме:

$$A = z''_{xx}(3,1) = 6.1 = 6, \quad B = z''_{xy}(3,1) = 6.3 = 18, \quad C = z''_{yy}(3,1) = 6.1 = 6,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 18 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 18^2 < 0$$

Следователно в тази точка функцията няма екстремум.

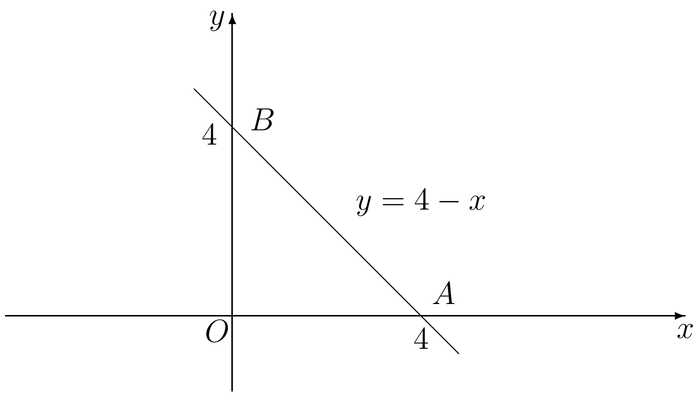
4. За точката $P(-3,-1)$ имаме: $A = z''_{xx}(-3,-1) = 6.(-1) = -6,$

$$B = z''_{xy}(-3,-1) = 6.(-3) = -18, \qquad C = z''_{yy}(-3,-1) = 6.(-1) = -6,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & -18 \\ -18 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 18^2 < 0$$

Следователно и в тази точка функцията няма екстремум.

2.21 Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията $z(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ в областта, заградена от координатните оси и правата с уравнение $x + y - 4 = 0$.



Решение: Първо ще намерим стойностите на локалните екстремуми в точките, които лежат вътре в областта. След това ще изследваме функцията по контура на областта.

Намираме първите частни производни:

$$z'_x = 2x + y - 5$$

$$z'_y = 2y + x - 4$$

Стационарните точки получаваме от системата

$$\left| \begin{array}{rcl} 2x + y - 5 & = & 0 \\ 2y + x - 4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Изразяваме от първото уравнение на системата $y = 5 - 2x$ и заместваме във второто уравнение. Получаваме

$$2(5-2x) + x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,$$

т.е. функцията има една стационарна точка $M(2,1)$ и тя лежи вътре в $\triangle OAB$. Стойността на екстремума е $z(2,1) = 4 + 1 + 2 - 10 - 4 + 10 = 3$.

Сега ще изследваме функцията по контура на областта.

1. По отсечката OA имаме: $y = 0, \quad 0 \le x \le 4$ и функцията става функция на една променлива $z = \varphi(x) = x^2 - 5x + 10$.

Достигаме до добре позната задача от функция на една променлива - да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията $\varphi(x) = x^2 - 5x + 10$ в затворения интервал $[0, 4]$. Първата производна $\varphi'(x) = 2x - 5$ се анулира при $x = 2,5$ и $\varphi(2,5) = \dfrac{15}{4}$. Стойностите на функцията в краищата на интервала са $\varphi(0) = 10, \quad \varphi(4) = 6$.

2. По отсечката OB имаме: $x = 0, \quad 0 \le y \le 4$ и функцията става функция на променливата $y: \quad z = \psi(y) = y^2 - 4y + 10$.

Отново имаме позната задача, както в 1., но този път за $\psi(y) = y^2 - 4y + 10$ в затворения интервал $[0, 4]$. Първата производна $\psi'(y) = 2y - 4$ се анулира при $y = 2$ и $\psi(2) = 6$. Стойностите на функцията в краищата на интервала са $\psi(0) = 10, \quad \psi(4) = 10$.

3. По хипотенузата AB на триъгълника имаме: $y = x - 4, \quad 0 \le x \le 4$ и функцията става функция на една променлива

$$z = x^2 + (x-4)^2 + x(x-4) - 5x - 4(x-4) + 10 = x^2 - 5x + 10,$$

т.е. изследването съвпада с това от първата точка.

Най-малката и най-голямата стойности на функцията са съответно най-малката и най-голямата от пресметнатите стойности, т.е. най-малката стойност на функцията се достига в точката на локален екстремум $M(2, 1)$ и е $z(2, 1) = 3$, а най-голямата стойност на функцията се достига във върховете O(0,0) и B(0,4) от контура и е $z(0, 0) = z(0, 4) = 10$.

Задачи за самостоятелна работа:

2.22 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x, y) = (x-1)^2 + 4y^2$$

Отг. $z_{min} = z(1, 0) = 0$

2.23 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x, y) = (x+3)^2 + (y-2)^2$$

Отг. $z_{min} = z(-3, 2) = 0$

2.24 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$$

Отг. $z_{min} = z(2, -3) = -22$

2.25 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 15$$

Отг. $z_{min} = z(-1,1) = 8$

2.26 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = 2x^2 - 4xy + 6y^2 - 8x + 16y + 19$$

Отг. $z_{min} = z(1,-1) = 7$

2.27 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x - 6y - 80$$

Отг. $z_{min} = z(-11,5) = -106$

2.28 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2 + 10x - 4y + 5$$

Отг. $z_{min} = z(-3,-2) = -6$

2.29 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = 3x^2 - 4xy + y^2 + 10x - 8y + 5$$

Отг. $(-3,-2)$ – седлова точка

2.30 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$$

Отг. $z_{min} = z(4,1) = -152, \quad z_{max} = z(-4,-1) = 152$

2.31 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 10$$

Отг. $z_{min} = z(2,4) = 2$

2.32 Да се изследва за локални екстремуми функцията

$$z(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$$

Отг. $z_{min} = z(0,0) = 0, \quad z_{max} = z(0,-1) = z(0,1) = 2e^{-1}$

Глава 3

Обикновени диференциални уравнения

Целта на тази глава е да запознае читателя с някои видове обикновени диференциални уравнения и начините за тяхното решаване.

Основни понятия и дефиниции

Уравнение, в което неизвестното е функция на една или няколко променливи и тя участва заедно със свои производни или диференциали, се нарича **диференциално уравнение**. Ако неизвестната функция е функция на няколко променливи, т.е. тя участва в уравнението заедно със свои частни производни, уравнението се нарича **частно диференциално уравнение**. Ако неизвестната функция е функция на една променлива, то уравнението се нарича **обикновено диференциално уравнение**. Ние ще разглеждаме само обикновени диференциани уравнения (ОДУ) и ще изпускаме думата "обикновено /обикновени".

Ред на диференциално уравнение наричаме най-високия ред на производните на функцията, участващи в уравнението.

Общият вид на уравнение от $n-$ти ред е

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad x \in (a, b) \tag{3.1}$$

Решение на диференциалното уравнение (3.1) наричаме всяка функция $y = \varphi(x)$, която го превръща в тъждество. Графиката на едно решение на диференциално уравнение се нарича **интегрална крива.** Ние ще отъждествяваме тези две понятия.

В по-голямата част от тази глава ще се занимаваме с **диференциални уравнения от първи ред**. Нека $y = y(x), \quad x \in (a, b)$. Общият вид на уравнение от първи ред е

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.2}$$

или

$$y' = f(x, y), \tag{3.3}$$

ако уравнението (3.2) е решено относно производната.

Например, уравнението $y' = 2x$ е уравнение от първи ред и $y(x) = x^2$ е решение на уравнението, защото $(x^2)' = 2x$. Нещо повече, и функциите $y(x, C) = x^2 + C$ (*еднопараметрична фамилия параболи*), където C е произволна константа, също са решения, защото отново $(x^2 + C)' = 2x$.

Функцията $y = \varphi(x, C)$, която превръща уравнението (3.2) в тъждество, се нарича **общо решение** на уравнението.

Равенство от вида $\Phi(x, y, C) = 0$, което задава общото решение в неявен вид, се нарича **общ интеграл**.

Частно решение на (3.2) е такова решение, което се получава от общото решение за конкретна стойност на константата C.

Особено решение на (3.2) е такова решение, което не може да се получи от общото решение за никаква стойност на константата C.

Задачата за намиране на такова решение на уравнението $y' = f(x, y)$, което удовлетворява условието

$$y(x_0) = y_0, \tag{3.4}$$

където (x_0, y_0) е зададена точка в равнината Oxy, наричаме **задача на Коши**.

Условието (3.4) се нарича **начално условие.** Общото решение на диференциално уравнение от първи ред е еднопараметрична фамилия криви линии и задачата на Коши изисква да се намери тази крива от фамилията, която минава през точката (x_0, y_0). Задачата на Коши има единствено решение, ако функцията $f(x, y)$ и нейната частна производна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ са непрекъснати.

3.1 Да се намери диференциалното уравнение, чието общо решение е фамилията криви линиии

$$y = (x - C)^2 \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{3.5}$$

Решение: Диференцираме (3.5) относно x и получаваме

$$y' = 2(x - C) \qquad (-\infty < x < +\infty) \tag{3.6}$$

От (3.6) $\Rightarrow$ $x - C = \dfrac{y'}{2}$ и замествайки в (3.5) получаваме

$$y'^{\,2} = 4y$$

Уравнения с разделени и разделящи се променливи

Ако запишем функцията $f(x,y)$ във вида $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ и отчетем, че $y' = \dfrac{dy}{dx}$, уравнението (3.3) можем да запишем в така наречената симетрична форма

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{3.7}$$

Ако функцията $M(x,y)$ е функция само на променливата x, т.е $M(x,y) = M(x)$, а $N(x,y)$ зависи само от променливата y, т.е $N(x,y) = N(y)$, то уравнението (3.7) добива вида

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0 \tag{3.8}$$

и се нарича уравнение с **разделени променливи**.

Решаването на това уравнение става с непосредствено интегриране на (3.8):

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C.$$

Но $\int M(x)\,dx = \varphi(x)$, а $\int N(y)\,dy = \psi(y)$ и решението има вида $\varphi(x)+\psi(y)-C = 0$, което означава, че обикновено решението се получава в неявен вид $\Phi(x,y,C) = 0$.

3.2 Решете уравнението $yy' - x = x^2$.

Решение: Преобразуваме уравнението и получаваме

$$yy' = x^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = x^2 + x \quad \Leftrightarrow \quad y\,dy = (x^2+x)\,dx,$$

което е уравнение с разделени променливи. Интегрираме и получаваме

$$\int y\,dy = \int (x^2+x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

3.3 Боряна си приготвила овесена каша и забелязала, че температурата на кашата намаляла от 100° на 60° за 10 минути. Температурата в стаята е 20°. Колко време още трябва да изчака Боряна, че температурата на кашата да стане 40°?

Решение: Да означим температурата на овесената каша в момента t с $T(t)$. От физиката е известно, че скоростта на изменение на температурата на дадено тяло е пропорционална на разликата от температурата на тялото и на окръжаващата го среда. Следователно процесът на изстиване се характеризира със следното диференциално уравнение с разделени променливи (*знакът минус е защото тялото изстива*).

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20) \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T-20}\,dT = -k\,dt \quad \Rightarrow \int \frac{1}{T-20}\,dT = -\int k\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{T-20}\, d(T-20) = -\int k\, dt \quad \Rightarrow \ln|T-20| = -k.t + \ln|C| \quad \Rightarrow \ln\left|\frac{T-20}{C}\right| = -k.t$$

Следователно общото решение на уравнението (3.9) е

$$T(t) = 20 + C.e^{-kt} \tag{3.10}$$

Сега трябва да определим константите C и k. От началното условие знаем, че при $t = 0$ температурата на овесената каша е $100°$. Следователно имаме $T(0) = 100 = 20 + C.e^0 = 20 + C$, т.е. $C = T(0) - 20 = 80$.

$$\Rightarrow \quad T(t) = 20 + 80.e^{-kt} \tag{3.11}$$

Следващото условие е, че при $t = 10$ температурата на овесената каша е $60°$. Следователно имаме $T(10) = 60 = 20 + 80.e^{-10k}$, т.е. $40 = 80.e^{-10k}$.
Следователно

$$e^{-10k} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad -10k = \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \qquad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 2}{10}$$

И така, решението е

$$T(t) = 20 + 80.e^{-\frac{\ln 2}{10}\cdot t} \tag{3.12}$$

Сега е лесно да определим за колко време температурата ще стане $40°$. Имаме

$$40 = 20 + 80.e^{-\frac{\ln 2}{10}\cdot t}, \qquad \text{т.е.} \quad e^{-\frac{\ln 2}{10}\cdot t} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\ln 2}{10}\cdot t = -\ln 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10\cdot\frac{\ln 4}{\ln 2} = 10\cdot\frac{2\ln 2}{\ln 2} = 20$$

Следователно Боряна трябва да изчака още 10 минути.

Ако $M(x,y) = \varphi_1(x).\varphi_2(y)$, а $N(x,y) = \psi_1(x).\psi_2(y)$, то уравнението (3.7) добива вида

$$\varphi_1(x).\varphi_2(y)\, dx + \psi_1(x).\psi_2(y)\, dy = 0 \tag{3.13}$$

и се нарича уравнение с **разделящи се променливи**.

Разделяме двете страни на (3.13) на $\psi_1(x).\varphi_2(y) \neq 0$ и получаваме уравнение с разделени променливи:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\, dx + \frac{\psi_2(y)}{\varphi_2(y)}\, dy = 0 \tag{3.14}$$

При разделянето на двете страни на (3.13) с $\psi_1(x).\varphi_2(y)$ може да загубим решения, които се получават от $\psi_1(x).\varphi_2(y) = 0$. Затова трябва да проверим дали решенията на уравнението $\psi_1(x).\varphi_2(y) = 0$ влизат в общия интеграл на (3.14) или не. Ако влизат в общия интеграл, те са частни решения, иначе те са особени решения.

3.4 Решете уравнението $(1+x)y\,dx + (1-y)x\,dy = 0$.

Решение: Разделяме двете страни на уравнението с $xy \neq 0$ и получаваме

$$\frac{1+x}{x}\,dx + \frac{1-y}{y}\,dy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad dx + \frac{1}{x}\,dx = dy - \frac{1}{y}\,dy$$

Интегрираме и получаваме общия интеграл

$$\int dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \int dy - \int \frac{1}{y}\,dy \quad \Rightarrow \quad x + \ln|x| = y - \ln|y| + C \quad \Rightarrow \quad \ln|xy| + x - y = C$$

От $xy = 0$ получаваме още две решения: $x = 0$ и $y = 0$. Те не могат да се получат от общия интеграл и следователно са особени решения.

Хомогенни уравнения

Дефиниция 3.1 *Функцията $F(x,y)$ се нарича **хомогенна от ред** k, ако за всяко t е изпълнено*

$$F(tx,ty) = t^k F(x,y) \tag{3.15}$$

Например функцията $F(x,y) = x - y$ е хомогенна от първи ред, защото $F(tx,ty) = tx - ty = t(x-y) = tF(x,y)$. Аналогично $F(x,y) = x^2 - y^2$ е хомогенна от втори ред.

Да разгледаме диференциално уравнение от първи ред в симетрична форма

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{3.16}$$

Уравнението (3.16) се нарича **хомогенно**, ако функциите $M(x,y)$ и $N(x,y)$ са хомогенни от един и същи ред, т.е.

$$M(tx,ty) = t^k M(x,y) \qquad \text{и} \qquad N(tx,ty) = t^k N(x,y) \tag{3.17}$$

При $N(x,y) \neq 0$ от (3.17) следва, че

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} \overset{(t=\frac{1}{x})}{=} \frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} = -f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.18}$$

Следователно (3.16) можем да запишем във вида

$$N(x,y)\,dy = -M(x,y)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

т.е. едно уравнение е **хомогенно**, ако има вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.19}$$

Решаването на хомогенно уравнение става с полагането $\dfrac{y}{x} = z(x)$, т.е.

$$y = x.z \tag{3.20}$$

Диференцираме (3.20) и получаваме

$$y' = z + x\,z' \tag{3.21}$$

Заместваме y' от (3.21) в (3.19) и получаваме

$$x.\,z' = f(z) - z, \tag{3.22}$$

което е уравнение с разделени променливи, т.е. хомогенните уравнения чрез полагането (3.20) се свеждат до уравнения с разделени променливи.

3.5 Решете уравнението $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0.$

Решение: Тъй като функциите $M(x,y) = x+y$ и $N(x,y) = x-y$ са хомогенни от първи ред, то уравнението е хомогенно. Преобразуваме го по следния начин:

$$(x-y)\,dy = -(x+y)\,dx, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x}, \quad \text{т.е}$$

$$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1} \quad (x \neq 0, x \neq y) \tag{3.23}$$

Полагаме $y = x.z$, откъдето $y' = z + x\,z'$, и заместваме в (3.23). Получаваме

$$z + x\,z' = \frac{1+z}{z-1}$$

$$x\,z' = \frac{1+z}{z-1} - z$$

$$x\,\frac{dz}{dx} = \frac{1+z-z^2+z}{z-1} = \frac{1+2z-z^2}{z-1}$$

$$\frac{z-1}{1+2z-z^2}\,dz = \frac{1}{x}\,dx, \qquad (1+2z-z^2 \neq 0)$$

което е с разделени променливи. Интегрираме и получаваме

$$\int \frac{z-1}{1+2z-z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx,$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2-2z}{1+2z-z^2}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx,$$

Внасяме числителя в първия интеграл под знака на диференциала и получаваме

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+2z-z^2}\,d(1+2z-z^2) = \int \frac{1}{x}\,dx$$

Следователно

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1+2z-z^2| = \ln|C| \qquad (C \neq 0),$$

откъдето след антилогаритмуване получаваме

$$x.\sqrt{1+2z-z^2} = C$$

Заместваме $z = \dfrac{y}{x}$ и получаваме общия интеграл

$$x^2 + 2xy - y^2 = C^2 \qquad (C \neq 0)$$

Следващото уравнение (3.24) е едно обобщение на хомогенното уравнение (3.19)

$$y' = x^{m-1} f\left(\frac{y}{x^m}\right) \tag{3.24}$$

Това уравнение може да сведем до уравнение с разделени променливи, ако положим $\dfrac{y}{x^m} = z(x)$, т.е.

$$y = x^m . z \tag{3.25}$$

Диференцираме (3.25) и получаваме

$$y' = m x^{m-1} z + x^m \, z' \tag{3.26}$$

Заместваме y' от (3.26) в (3.24) и получаваме

$$m x^{m-1} z + x^m \, z' = x^{m-1} f(z)$$

$$x^m \, z' = x^{m-1} [f(z) - mz]$$

$$x \, z' = f(z) - mz$$

$$x \, \frac{dz}{dx} = f(z) - mz$$

$$\frac{1}{f(z) - mz} \, dz = \frac{1}{x} \, dx,$$

което е уравнение с разделени променливи.

Уравнение от вида

$$y' = B \, y^2 + R(x) \tag{3.27}$$

се нарича **уравнение на Рикати**.

Уравнението на Рикати се решава чрез интегриране в много малък брой случаи. Един такъв случай имаме, когато $R(x) = Ax^{-2}$. Тогава уравнението (3.27) е от вида (3.24). Наистина,

$$y' = B \, y^2 + A x^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = x^{-2} \left(A + B \, \left(\frac{y}{x^{-1}}\right)^2 \right),$$

което е от вида (3.24) при $m = -1$ и $f(z) = A + B \, z^2$.

Линейни уравнения и уравнения на Бернули

Уравнение от вида

$$y' + A(x)\,y = f(x) \tag{3.28}$$

се нарича **линейно**. Уравнението е линейно, защото и неизвестната функция y и нейната производна y' участват в уравнението на първа степен. При $f(x) = 0$ уравнението се нарича линейно *хомогенно* уравнение

$$y' + A(x)\,y = 0, \tag{3.29}$$

а при $f(x) \neq 0$ - *нехомогенно.*

Ще изведем формула за решаване на линейно уравнение чрез така наречения метод на интегрираща множител (*Метод на Ойлер*).

Умножаваме двете страни на уравнението (3.28) с $e^{\int A(x)\,dx} \neq 0$ и получаваме

$$\underbrace{y'\,.\,e^{\int A(x)\,dx} + A(x)\,.\,y\,.\,e^{\int A(x)\,dx}} = f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}$$

$$\left(y\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\right)' = f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}$$

$$y\,.\,e^{\int A(x)\,dx} = C + \int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx$$

$$y = e^{-\int A(x)\,dx}\left[C + \int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx\right] \tag{3.30}$$

И така, решението на линейното уравнение (3.28) се задава с формулата (3.30), която можем да запишем като сума на две събираеми

$$y = C\,.\,e^{-\int A(x)\,dx} + e^{-\int A(x)\,dx}\,.\int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx \tag{3.31}$$

Първото събираемо

$$Y = C\,.\,e^{-\int A(x)\,dx}$$

очевидно е решението на линейното хомогенно уравнение (3.29), защото се получава от (3.30) при $f(x) = 0$.

Второто събираемо

$$\eta = e^{-\int A(x)\,dx}\,.\int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx$$

е частно решение на (3.28), защото

$$\eta' + A(x)\,.\,\eta =$$

$$= \left(e^{-\int A(x)\,dx}\,.\int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx\right)' + A(x)\,.\,\left(e^{-\int A(x)\,dx}\,.\int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx\right) =$$

$$= -A(x)e^{-\int A(x)\,dx} \,.\, \int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx + e^{-\int A(x)\,dx}\,.\,f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}$$

$$+ A(x)\,.\,e^{-\int A(x)\,dx}\,.\,\int f(x)\,.\,e^{\int A(x)\,dx}\,dx = f(x)$$

Следователно *решението на нехомогенното линейно уравнение (3.28) е сума от решението на съответното хомогенно уравнение (3.29) и едно частно решение на (3.28)*

$$y = Y + \eta$$

3.6 Решете уравнението $y' - y = e^x$.

Решение: Уравнението е линейно с $A(x) = -1$ и $f(x) = e^x$. Прилагаме формула (3.30) и получаваме

$$y = e^{\int 1\,dx}\left[C + \int e^x\,.\,e^{-\int 1\,dx}\,dx\right] = e^x\left[C + \int e^x\,.\,e^{-x}\,dx\right] = e^x\left[C + \int 1\,dx\right]$$

$$y = e^x\,[C + x] = Ce^x + xe^x$$

3.7 Решете уравнението $y' - \dfrac{1}{x}\,y = -x^2$.

Решение: Уравнението е линейно с $A(x) = -\dfrac{1}{x}$ и $f(x) = -x^2$. Прилагаме отново формула (3.30) и получаваме

$$y = e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\left[C - \int x^2\,.\,e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\,dx\right] = e^{\ln|x|}\left[C - \int x^2\,.\,e^{-\ln|x|}\,dx\right] = (\text{при } \ x \geq 0) =$$

$$= x\left[C - \int x^2\,.\,\frac{1}{x}\,dx\right] = x\left[C - \int x\,dx\right] = x\left[C - \frac{x^2}{2}\right] = Cx - \frac{x^3}{2}$$

3.8 Намерете силата на тока $I(t)$ в електрическа верига със съпротивление R , самоиндукция L и електродвижеща сила $E = E_0\,\sin\,\omega t$.

Решение: От втория закон на Кирхоф знаем, че

$$E = I\,R + L\,\frac{dI}{dt}$$

Следователно

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\,I = \frac{E_0}{L}\,\sin\,\omega t \tag{3.32}$$

Уравнението (3.32) е линейно с $A(t) = \dfrac{R}{L}$ и $f(t) = \dfrac{E_0}{L}\sin\omega t$. Прилагаме формула (3.30) и отчитайки, че $e^{\int a\,dt} = e^{a\int 1\,dt} = e^{a\,t}$ получаваме

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[C + \frac{E_0}{L}\int \sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t}\,dt\right] \tag{3.33}$$

Ще решим $J = \displaystyle\int \sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t}\,dt = \frac{L}{R}\int \sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t}\,d\left(\frac{R}{L}t\right)$ като два пъти внесем експоненциалната функция под знака на диференциала и интегриране по части (виж задача 4.34 от ВМ, част II) и получения резултат ще заместим в (3.33)

$$J = \frac{L}{R}\int \sin\omega t\,d\,e^{\frac{R}{L}t} = \frac{L}{R}\left(\sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t} - \int e^{\frac{R}{L}t}\,d\sin\omega t\right) =$$

$$= \frac{L}{R}\left(\sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t} - \omega\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t\,dt\right) =$$

$$= \frac{L}{R}\sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega L}{R}\int e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t\,dt =$$

$$= \frac{L}{R}\sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega L^2}{R^2}\int \cos\omega t\,d\,e^{\frac{R}{L}t} =$$

$$= \frac{L}{R}\sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega L^2}{R^2}\left(\cos\omega t\,.e^{\frac{R}{L}t} - \int e^{\frac{R}{L}t}\,d\cos\omega t\right) =$$

$$= \frac{L}{R}\sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega L^2}{R^2}\left(\cos\omega t\,.e^{\frac{R}{L}t} + \omega\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,dt\right) =$$

$$= \frac{L}{R}\sin\omega t\,.\,e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega L^2}{R^2}\cos\omega t\,.e^{\frac{R}{L}t} - \frac{\omega^2L^2}{R^2}J$$

Следователно

$$\left(1 + \frac{\omega^2L^2}{R^2}\right)J = \frac{L}{R^2}e^{\frac{R}{L}t}\left(R\sin\omega t - \omega\,L\cos\omega t\right)$$

$$\left(\frac{R^2+\omega^2L^2}{R^2}\right)J = \frac{L}{R^2}e^{\frac{R}{L}t}\left(R\sin\omega t - \omega\,L\cos\omega t\right)$$

$$J = e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{LR}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t - \frac{\omega\,L^2}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t\right) \tag{3.34}$$

Заместваме израза от (3.34) в (3.33) и получаваме

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t}\left[C + e^{\frac{R}{L}t}\left(\frac{E_0\,R}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t - \frac{\omega E_0\;L}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t\right)\right]$$

$$I(t) = C\,.\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t - \omega\,L\cos\omega t) \tag{3.35}$$

Първото събираемо в (3.35) в течение на времето клони бързо към нула (защото $e^{-\frac{R}{L}t}$ клони към нула) и следователно на практика силата на тока се определя от второто събираемо, т.е.

$$I(t) = \frac{E_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R \sin \omega t - \omega\, L \cos \omega t)$$

и тя е периодична функция със същата честота като тази на електродвижещата сила, но с друга амплитуда и начална фаза.

Да намерим амплитудата и началната фаза. За тази цел да положим

$$\frac{E_0\, R}{R^2 + \omega^2 L^2} = B \cos \alpha \qquad \text{и} \qquad \frac{E_0\, \omega\, L}{R^2 + \omega^2 L^2} = B \sin \alpha \tag{3.36}$$

Като повдигнем на квадрат тези две равенства и ги съберем получаваме

$$B = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \tag{3.37}$$

а като ги разделим почленно

$$\operatorname{arctg} \alpha = \frac{\omega\, L}{R} \tag{3.38}$$

Следователно за силата на тока получаваме

$$I(t) = B(\cos \alpha \sin \omega t - \sin \alpha \cos \omega t) = B \sin(\omega\, t - \alpha)$$

Това означава, че (3.37) задава амплитудата, а (3.38) началната фаза.

Уравнение от вида

$$y' + A(x)\, y = f(x)\,.\, y^m \qquad\qquad (m \neq 0, m \neq 1) \tag{3.39}$$

се нарича **уравнение на Бернули**. Ако $m = 1$ или $m = 0$, уравнението ще бъде съответно с разделени променливи или линейно. Решаването на уравнението на Бернули се свежда до решаване на линейно уравнение. Това става по следния начин:

Разделяме двете страни на (3.39) с y^m и получаваме

$$\frac{1}{y^m}\, y' + A(x)\, \frac{y}{y^m} = f(x)$$

$$\frac{1}{y^m}\, y' + A(x)\, y^{1-m} = f(x) \tag{3.40}$$

Полагаме

$$y^{1-m} = z(x) \tag{3.41}$$

Диференцираме (3.41) и получаваме

$$(1 - m)\, y^{1-m-1}\, y' = z' \qquad \Leftrightarrow \qquad (1 - m)\, \frac{1}{y^m}\, y' = z'$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{y^m}\, y' = \frac{1}{1-m} z' \tag{3.42}$$

Заместваме изразите от (3.41) и (3.42) в (3.40) и получаваме

$$\frac{1}{1-m} z' + A(x)\, z = f(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad z' + (1-m)\, A(x)\, z = (1-m)\, f(x), \tag{3.43}$$

което е линейно уравнение.

3.9 Решете уравнението $y' - \dfrac{4}{x}\, y = x\sqrt{y}$.

Решение: Имаме уравнение на Бернули с $m = \dfrac{1}{2}$. Разделяме двете страни на уравненито с $\sqrt{y}$ и получаваме

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\, y' - \frac{4}{x}\, \frac{y}{\sqrt{y}} = x$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\, y' - \frac{4}{x}\, \sqrt{y} = x \tag{3.44}$$

Полагаме

$$\sqrt{y} = z(x) \tag{3.45}$$

Диференцираме (3.45) и получаваме

$$\frac{1}{2\sqrt{y}}\, y' = z'$$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\, y' = 2\, z' \tag{3.46}$$

Заместваме изразите от (3.45) и (3.46) в (3.44) и получаваме линейното уравнение

$$2\, z' - \frac{4}{x}\, z = x \qquad \Leftrightarrow \qquad z' - \frac{2}{x}\, z = \frac{x}{2} \tag{3.47}$$

Прилагаме формулата за решаване на линейно уравнение (3.30) $\left(A(x) = -\dfrac{2}{x},\quad f(x) = \dfrac{x}{2}\right)$ и получаваме

$$z = e^{\int \frac{2}{x}\, dx} \left[C + \int \frac{x}{2} \,.\, e^{-\int \frac{2}{x}\, dx}\, dx\right]$$

$$z = e^{2\ln|x|} \left[C + \int \frac{x}{2} \,.\, e^{-2\ln|x|}\, dx\right]$$

$$z = x^2 \left[C + \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx\right] = x^2 \left[C + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x}\, dx\right] = x^2 \left(C + \frac{1}{2}\, \ln|x|\right)$$

Заместваме $z(x) = \sqrt{y}$ и получаваме крайното решение

$$\sqrt{y} = x^2 \left(C + \frac{1}{2}\, \ln|x|\right)$$

Точни уравнения

Уравнение от вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{3.48}$$

се нарича **точно,** ако лявата му страна е точен (пълен) диференциал на някаква функция $u(x,y)$, т.е.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{3.49}$$

Тогава уравнението (3.48) добива вида $d\,u = 0$ и неговото решение е $u(x,y) = C$, където C е произволна константа.

Условието (3.49) е еквивалентно със следните две условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \tag{3.50}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \tag{3.51}$$

Следващата теорема е необходимо и достатъчно условие едно уравнение от вида (3.48) да бъде точно. Втората част на доказателството показва начина на решаване на точно диференциално уравнение.

Теорема 3.1 *Нека функциите* $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *имат непрекъснати производни. Уравнението (3.48) е точно тогава и само тогава, когато*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.52}$$

Доказателство:

1. Нека уравнението е точно, т.е. в сила са условията (3.50) и (3.51). Диференцираме (3.50) относно y, (3.51) относно x и получаваме съответно

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \tag{3.54}$$

Но както знаем от Глава 2, вторите смесени производни са равни и следователно

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

2. Нека сега е изпълнено условието (3.52). Ще докажем, че уравнението е точно като намерим функция $u(x,y)$, такава че за нея да са изпълнени условията (3.50) и (3.51). Интегрираме (3.50) относно променливата x, а интеграционната константа може да зависи от другата променлива, y. Получаваме

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y) \tag{3.55}$$

Диференцираме (3.55) относно y и замествме в (3.51). Получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \int P(x,y)\,dx}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial \int P(x,y)\,dx}{\partial y} = Q(x,y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx \tag{3.56}$$

В последното равенство използвахме теорема, аналогична на теорема 1.7 от раздел “Интеграл, зависещ от параметър“ на Глава 1.

Сега ще докажем, че дясната страна

$$Q(x,y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx \tag{3.57}$$

в равенство (3.56) е функция само на променливата y. За тази цел ще намерим производната на (3.57) относно x и ще покажем, че тя е равна на нула. Наистина,

$$\left(Q(x,y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right)'_x = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Следователно

$$Q(x,y) - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \psi(y)$$

и от (3.56) получаваме

$$\varphi\,(y) = \int \psi(y)\,dy$$

с което намерихме и функцията $u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \int \psi(y)\,dy$ ■

3.10 Решете уравнението $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$

Решение: Проверяваме дали уравнението е точно.

$$P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \qquad\qquad Q(x,y) = 6x^2y + 4y^3$$

Имаме

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy,$$

и следователно уравнението е точно. Условията (3.50) и (3.51) са

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \tag{3.58}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3 \tag{3.59}$$

Интегрираме (3.58) относно променливата x, а произволната константа можем да считаме за функция на y. Получаваме

$$u(x,y) = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) \tag{3.60}$$

Диференцираме (3.60) относно y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x^3 + 3x^2y^2)'_y + \varphi'(y) = 6x^2y + \varphi'(y)$$

Замествме в (3.59) и получаваме

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = 4y^3 \tag{3.61}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi\,(y) = 4\int y^3\,dy = y^4$$

с което намерихме и функцията $u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$.

Решението на уравнението е

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

Задачи за самостоятелна работа:

3.11 $x\,y' - y = y^2$

Отг. $\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} = C\,x$

3.12 $\sin x\,y' - \cos x\,y = 0$

Отг. $y = C\,\sin x$

3.13 $y'\sin x = y\ln|y|$

Отг. $\ln|y| = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

3.14 $(x + xy^2)\,dx + (y + yx^2)\,dy = 0$

Отг. $(1+x^2)(1+y^2) = C$

3.15 $(x^2+1)\,dy - x^4\,dx = 0$

Отг. $y = \dfrac{x^3}{x} - x + \operatorname{arctg} x + C$

3.16 $(x^2-y^2)y' - xy = 0$

Отг. $\ln|C\,y| + \dfrac{x^2}{2y^2} = 0$

3.17 $(xy-y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

Отг. $y\,\ln|Cx| = x$

3.18 $x\,y' = x + y$

Отг. $y = x\,\ln|Cx|$

3.19 $x\,y' - y - x^2 = 0$

Отг. $y = x^2 + C\,x$

3.20 $x\,y' - 2y = x^4$

Отг. $y = \dfrac{x^5}{3} + c\,x^2$

3.21 $y' + \dfrac{1}{x}\,y = -xy^2$

Отг. $y = \dfrac{1}{x^4 + Cx}$

3.22 $(x+y)\,dx + (x+2y)\,dy = 0$

Отг. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2C$

3.23 $(x^2+y^2-2x)\,dx + 2xy\,dy = 0$

Отг. $x^3 + 3y^2x - 3x^2 = 3C$

3.24 $x\,y' + y = x^3y^2$

Отг. $xy(2C - x^2) = 2$

Линейни хомогенни ДУ от n-ти ред. Структура на решението

Общият вид на линейно диференциално уравнение от n-ти ред е

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y}_{L(y)} = f(x) \tag{3.62}$$

Функциите $f(x), a_i(x)$ са непрекъснати, а $x \in (a, b)$.

Ако $f(x) = 0$, уравнението се нарича линейно хомогенно ДУ (ЛХДУ).
Ако $f(x) \neq 0$, уравнението се нарича линейно нехомогенно ДУ (ЛНХДУ).

Означаваме лявата страна на (3.62) с $L(y)$, т.е.

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y \tag{3.63}$$

По този начин дефинираме един оператор, който действа на функцията y чрез равенството (3.63). Този оператор е **линеен**, защото удовлетворява следните две условия:

1. $L(C.y) = C\,.\,L(y) \qquad (C - \text{константа})$

2. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$

Проверката на тези свойства е елементарна, след като знаем правилата за диференциране. От тези две свойства веднага следва, че

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\,.\,y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} L\left(C_k\,.\,y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,.\,L(y_k) \tag{3.64}$$

В следващите редове ще разглеждаме ЛХДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0 \tag{3.65}$$

Теорема 3.2 *Ако $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са решения на (3.65) (т.е. $L(y_k) = 0$), то и всяка тяхна линейна комбинация $Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k.y_k$ е решение на (3.65).*

Доказателство: От (3.64) имаме

$$L(Y) = L\left(\sum_{k=1}^{n} C_k\,.\,y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,.\,L(y_k) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,.\,0 = 0$$

■

Дефиниция 3.2 *Казваме, че функциите* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *са* ***линейно зависими****, ако съществуват n-на брой константи* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$*, поне една от които различна от нула, такива че*

$$\alpha_1.y_1(x) + \alpha_2.y_2(x) + \cdots + \alpha_n.y_n(x) = 0 \tag{3.66}$$

Ако равенството (3.66) е изпълнено само за $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, функциите са **линейно независими**.

Дефиниция 3.3 *Под* ***фундаментална система решения*** $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *на ЛХДУ (3.65) ще разбираме съвкупност от n-на брой линейно независими решения на това уравнение.*

Дефиниция 3.4 *Под* ***детерминанта на Вронски*** *за функциите* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ *ще разбираме*

$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

На първия ред са написани функциите, а на всеки следващ ред стоят производните на функциите от предишния ред.

Теорема 3.3 *Ако функциите* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *са линейно зависими в интервала* (a, b) *, то* $W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = 0$ *за всяко* $x \in (a, b)$.

Доказателство: Тъй като $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ са линейно зависими, следва че съществува n-торка $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$, за която е изпълнено

$$\alpha_1.y_1(x) + \alpha_2.y_2(x) + \cdots + \alpha_n.y_n(x) = 0$$

Разглеждаме следната линейна хомогенна система алгебрични уравнения относно константите $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_1.y_1(x) + \alpha_2.y_2(x) + \dots + \alpha_n.y_n(x) = 0 \\ \alpha_1.y_1'(x) + \alpha_2.y_2'(x) + \dots + \alpha_n.y_n'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1.y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2.y_2^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n.y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{array} \right. \tag{3.67}$$

От ВМ, част I, Глава 5 знаем, че щом една линейна хомогенна система алгебрични уравнения има ненулево решение, детерминантата на матрицата на системата трябва да е равна нула. В нашия случай детерминантата на матрицата на системата е детерминантата на Вронски, т.е.

$$W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = 0 \quad \text{за всяко} \quad x \in (a, b)$$

■

Следствие 3.1 *Ако* $W[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] \neq 0$ *поне за едно* $x_0 \in (a, b)$*, то функциите* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *са линейно независими.*

Следващите две теореми ще изложим без доказателство, като втората теорема изяснява структурата на решението на ЛХДУ.

Теорема 3.4 *Функциите* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *образуват фундаментална система решения на (3.65) тогава и само тогава, когато*

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] \neq 0 \qquad \text{за всяко} \ \ x \in (a, b).$$

Теорема 3.5 *Ако* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *е фундаментална система решения на (3.65), то всяко решение* $Y(x)$ *на (3.65) има вида*

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \,.\, y_k(x),$$

където C_k *са произволни константи.*

След като знаем структурата на решението на ЛХДУ (3.65), то можем да изясним и структурата на решението на ЛНХДУ (3.62). Ще покажем, че общото решение $y(x)$ на ЛНХДУ (3.62) се получава като сума от решението $Y(x)$ на съответното ЛХДУ (3.65) и едно частно решение $\eta(x)$ на ЛНХДУ (3.62), т.е.

$$y(x) = Y(x) + \eta(x)$$

Наистина, ако $L(Y) = 0$ и $L(\eta) = f(x)$, то

$$L(y) = L(Y + \eta) = L(Y) + L(\eta) = 0 + f(x) = f(x)$$

Обратно, нека $y(x)$ е решение на (3.62) и $\eta(x)$ е едно частно решение на същото уравнение. Тогава за разликата $y(x) - \eta(x)$ получаваме

$$L(y - \eta) = L(Y) - L(\eta) = f(x) - f(x) = 0,$$

т.е. $y(x) - \eta(x)$ е решение на ЛХДУ (3.65) и следователно

$$y(x) - \eta(x) = Y(x) \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = Y(x) + \eta(x)$$

■

Дотук научихме, че за да решаваме ЛНХДУ от n-ти ред трябва да можем да се справяме успешно с две неща:

1. Да решаваме съответното ЛХДУ.

2. Да намираме частно решение на ЛНХДУ.

В следващия раздел ще се занимаем с първата задача, когато коефициентите в уравнението са константи.

Линейни хомогенни ДУ от n-ти ред с постоянни коефициенти

Разглеждаме уравнението

$$y^{(n)} + a_{n-1} \,.\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \,.\, y' + a_0 \,.\, y = 0 \tag{3.68}$$

За да покажем как се решава това уравнение ще ни е необходима следващата лема, при доказателството на която ще използваме следствие 3.1 от предишния раздел.

Лема 3.1 *1. Функциите* $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$ *са линейно независими.*

2. Функциите $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$ *са линейно независими, ако* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *са различни числа.*

3. Функциите $e^{rx}, x \,.\, e^{rx}, \ldots, x^{k-1} e^{rx}$ *са линейно независими.*

Доказателство:

1.

$$W[1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & ... & x^{k-1} \\ 0 & 1 & 2x & ... & (k-1)x^{k-2} \\ 0 & 0 & 2\,! & ... & (k-1)(k-2)x^{k-3} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & (k-1)! \end{vmatrix} = 2! \,.\, 3! \ldots (k-1!) \neq 0$$

2.

$$W[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & ... & e^{r_n x} \\ r_1 \,.\, e^{r_1 x} & r_2 \,.\, e^{r_2 x} & ... & r_n \,.\, e^{r_n x} \\ ... & ... & ... & ... \\ r_n^{n-1} \,.\, e^{r_1 x} & r_n^{n-1} \,.\, e^{r_2 x} & ... & r_n^{n-1} \,.\, e^{r_n x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ r_1 & r_2 & ... & r_n \\ ... & ... & ... & ... \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & ... & r_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

защото експоненциалната функция е винаги положителна, а последната детерминанта е детерминанта на Вандермонд и тя е различна от нула когато числата r_i са различни.

3. Тук ще използваме дефиницията. Трябва да докажем, че равенството

$$\alpha_1 \,.\, e^{rx} + \alpha_2 \,.\, x \,.\, e^{rx} + \cdots + \alpha_k \,.\, x^{k-1} \,.\, e^{rx} = 0$$

е възможно само за $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Изнасяме $e^{rx} \neq 0$ пред скоби и получаваме

$$e^{rx}(\alpha_1 \,.\, 1 + \alpha_2 \,.\, x + \cdots + \alpha_k \,.\, x^{k-1}) = 0$$

$$\alpha_1 \,.\, 1 + \alpha_2 \,.\, x + \cdots + \alpha_k \,.\, x^{k-1} = 0$$

Но вече доказахме, че функциите $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$ са линейно независими и следователно $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. ■

Сега можем да пристъпим към решаването на уравнение (3.68). Търсим решение от вида

$$y(x) = e^{rx}$$

Намираме производните до n-ти ред включително

$$y\,' = re^{rx}, \quad y\,'' = r^2 e^{rx}, \ldots, y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

и заместваме в (3.68). Получаваме

$$e^{rx}(r^n + a_{n-1} \,.\, r^{n-1} + \cdots + a_1 \,.\, r + a_0) = 0$$

и след съкращаване на $e^{rx} \neq 0$

$$r^n + a_{n-1} \,.\, r^{n-1} + \cdots + a_1 \,.\, r + a_0 = 0 \qquad (3.69)$$

Уравнението (3.69) се нарича **характеристично уравнение** на уравнението (3.68).

За разлика от (3.68), то е алгебрично уравнение от n-та степен и от основната теорема на алгебрата (ВМ, част I, Глава 2) следва, че има n-на брой корени, отчитайки и тяхната кратност.

Ще разгледаме различните случаи:

1. ***Нека характеристичното уравнение има*** n ***на брой различни реални корени*** $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

На тези корени съответстват функциите

$$y_1(x) = e^{r_1 x},\; y_2(x) = e^{r_2 x},\; \ldots, y_n(x) = e^{r_n x}$$

От Лема 3.1 следва, че те са линейно независими и тъй като са n-на брой, те образуват фундаментална система решения. Тогава според теорема 3.5 решението на (3.68) е линейна комбинация от функциите на тази система, т.е.

$$Y(x) = C_1 \,.\, y_1(x) + C_2 \,.\, y_2(x) + \cdots + C_n \,.\, y_n(x) = C_1 \,.\, e^{r_1 x} + C_2 \,.\, e^{r_2 x} + \cdots + C_n \,.\, e^{r_n x}$$

3.25 Решете уравнението $y\,'' - 5y\,' + 6y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение е $r^2 - 5r + 6 = 0$. Корените му са $r_1 = 2$ и $r_2 = 3$. На първия корен съответства функцията $y_1(x) = e^{2x}$, на втория $y_2(x) = e^{3x}$ и решението е

$$y(x) = C_1 \,.\, e^{2x} + C_2 \,.\, e^{3x}$$

3.26 Решете уравнението $y'' - 3y' - 10y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение е $r^2 - 3r - 10 = 0$. Корените му са $r_1 = -2$ и $r_2 = 5$. На първия корен съответства функцията $y_1(x) = e^{-2x}$, на втория $y_2(x) = e^{5x}$ и решението е

$$y(x) = C_1 \,.\, e^{-2x} + C_2 \,.\, e^{5x}$$

3.27 Решете уравнението $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение е $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$. Групираме първо и трето събираемо, второ и четвърто и получаваме

$$r^3 - r - 2r^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(r^2 - 1) - 2(r^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^2 - 1)(r - 2) = 0$$

Следователно корените са $r_1 = -1$, $r_2 = 1$ и $r_3 = 2$.
На първия корен съответства функцията $y_1(x) = e^{-x}$, на втория $y_2(x) = e^{x}$, на третия $y_3(x) = e^{2x}$ и решението е

$$y(x) = C_1 \,.\, e^{-x} + C_2 \,.\, e^{x} + C_3 \,.\, e^{2x}$$

2. *Нека характеристичното уравнение има само реални корени, от които един е k-кратен $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = r$ и останалите $n - k$ са различни реални числа $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_n$.*

В този случай функциите

$$y_1(x) = e^{rx},\ y_2(x) = xe^{rx},\ \ldots,\ y_k(x) = x^{k-1}e^{r_x},\ y_{k+1}(x) = e^{r_{k+1}x}, \ldots,\ y_n(x) = e^{r_n x}$$

са линейно независими и тъй като са n-на брой, те образуват фундаментална система решения. Тогава според теорема 3.5 решението на (3.68) е линейна комбинация от функциите на тази система, т.е.

$$Y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} + \cdots + C_k x^{k-1} e^{r_x} + C_{k+1} e^{r_{k+1}x} + \cdots + C_n e^{r_n x}$$

3.28 Решете уравнението $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$ има един двоен корен $r_1 = r_2 = 2$.
Фундаменталната система решения е $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = xe^{2x}$ и решението на уравнението е

$$y(x) = C_1 \,.\, e^{2x} + C_2 \,.\, xe^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 \,.\, x)$$

3.29 Решете уравнението $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r - 1)^3 = 0$ има един троен корен $r_1 = r_2 = r_3 = 1$.
Фундаменталната система решения е $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = xe^{x}$, $y_3(x) = x^2 e^{x}$ и решението на уравнението е

$$y(x) = C_1 \,.\, e^{x} + C_2 \,.\, xe^{x} + C_3 \,.\, x^2 e^{x} = e^{2x}(C_1 + C_2 \,.\, x + C_3 \,.\, x^2)$$

В следващите разглеждания ще ни е необходима формулата на Ойлер

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

и следната

Лема 3.2 *Ако функцията* $z = u(x) + i\,.\,v(x)$ *е решение на (3.68), то* $u(x)$ *и* $v(x)$ *са също решения на (3.68).*

Доказателство: По условие $L(z) = L(u + i\,.\,v) = L(u) + i\,.L(v) = 0$. Последното е възможно само ако $L(u) = 0$ и $L(v) = 0$. ■

3. *Нека характеристичното уравнение има комплексни корени*.

Ако $r_1 = a + i\,b$ е корен, то и $r_2 = a - i\,b$ е също корен, защото ако едно алгебрично уравнение с реални коефициенти има комплексен корен, то комплексно спрегнатото му число също е корен.

На $r_1 = a + i\,b$ съответната функция е

$$\overline{y}_1(x) = e^{(a+i\,b)x} = e^{ax}.e^{i\,bx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = e^{ax}\cos bx + i\,.e^{ax}\sin bx$$

На $r_2 = a - i\,b$ съответната функция е

$$\overline{y}_2(x) = e^{(a-i\,b)x} = e^{ax}.e^{-i\,bx} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx) = e^{ax}\cos bx - i\,.e^{ax}\sin bx$$

От Лема 3.2 следва, че двете функции

$$y_1(x) = e^{ax}\,.\,\cos bx \qquad \text{и} \qquad y_2(x) = e^{ax}\,.\,\sin bx$$

също са решения. Тези функции са линейно независими, защото

$$W[y_1(x),\, y_2(x)] = \begin{vmatrix} e^{ax}\,.\cos bx & e^{ax}\,.\sin bx \\ ae^{ax}\,.\cos bx - be^{ax}\,.\sin bx & ae^{ax}\,.\sin bx + be^{ax}\,.\cos bx \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2ax} \begin{vmatrix} \cos bx & \sin bx \\ a\,.\cos bx - b\,.\sin bx & a\,.\sin bx + b\,.\cos bx \end{vmatrix}$$

$$= b\,.e^{2ax}(\cos^2 x + \sin^2 x) = b\,.e^{2ax} \neq 0$$

и тях вземаме за съответни на двойката комплексни корени.

4. *Нека характеристичното уравнение има k-кратни комплексни корени*.

Тогава аналогично на втория случай съответните функции са

$$e^{ax}\,.\,\cos bx,\ xe^{ax}\,.\,\cos bx,\ x^2e^{ax}\,.\,\cos bx, \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\,.\,\cos bx$$

и

$$e^{ax}\,.\,\sin bx,\ xe^{ax}\,.\,\sin bx,\ x^2e^{ax}\,.\,\sin bx, \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\,.\,\sin bx$$

3.30 Решете уравнението $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение $r^2 - 4r + 13 = 0$ има корени

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = 2 \pm 3\,i$$

Съответните функции са $y_1(x) = e^{2x}\cos 3x$ и $y_2(x) = e^{2x}\sin 3x$ и решението е

$$y(x) = C_1 \,.\, e^{2x}\cos 3x + C_2 \,.\, e^{2x}\sin 3x = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$$

3.31 Решете уравнението $y''' - 4y'' + 9y' - 10y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение е $r^3 - 4r^2 + 9r - 10 = 0$. Чрез схемата на Хорнер

	1	-4	9	-10
$a=2$	1	-2	5	0

лесно виждаме, че единият корен е числото две, а останалите два корена намираме като решим квадратното уравнение $r^2 - 2r + 5 = 0$. Следователно корените са

$$r_1 = 2, \quad r_{2,3} = 1 \pm 2\,i$$

Съответните функции са $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^x\cos 2x$ и $y_3(x) = e^x\sin 2x$. Решението е

$$y(x) = C_1 \,.\, e^{2x} + C_2 \,.\, e^x\cos 2x + C_3 \,.\, e^x\sin 2x = C_1 \,.\, e^{2x} + e^x(C_2\cos 2x + C_3\sin 2x)$$

3.32 Решете уравнението $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Решение: Характеристичното уравнение е $r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = 0$. Следователно корените са $r_{1,2} = i$, $r_{3,4} = -i$, т.е. комплексно спрегнатата двойка $\pm i$ са корени с кратност две.

Съответните функции са

$$y_1(x) = e^{0x}\cos x = \cos x, \quad y_2(x) = xe^{0x}\cos x = x\cos x,$$

$$y_3(x) = e^{0x}\sin x = \sin x, \quad y_3(x) = xe^{0x}\sin x = x\sin x$$

Решението е

$$y(x) = C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3\sin x + C_4 x\sin x$$

Линейни нехомогенни ДУ от n-ти ред с постоянни коефициенти и специална дясна част

Разглеждаме уравнението

$$y^{(n)} + a_{n-1} \,.\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \,.\, y' + a_0 \,.\, y = f(x), \tag{3.70}$$

където функцията $f(x)$ има вида

$$f(x) = e^{ax} \left[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx \right] \tag{3.71}$$

Тук $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ са полиноми съответно от n-та и m-та степен.

Ако с $Y(x)$ означим решението на съответното хомогенно уравнение, а с $\eta(x)$ едно частно решение на (3.70), то както вече знаем, общото решение на (3.70) е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x)$$

В предишния раздел се научихме как се решава хомогенното уравнение и следователно сега основната ни задача е как да намерим частното решение $\eta(x)$.

Първо ще разгледаме случая $b = 0$. Тогава $\cos bx = 1$, а $\sin bx = 0$ и функцията $f(x)$ добива вида

$$f(x) = e^{ax} \,.\, P_n(x) \tag{3.72}$$

Възможни са два случая:

1. Числото a не е корен на характеристичното уравнение

$$r^n + a_{n-1} \,.\, r^{n-1} + \cdots + a_1 \,.\, r + a_0 = 0$$

В този случай търсим $\eta(x)$ от вида

$$\eta(x) = e^{ax} \,.\, R_n(x), \tag{3.73}$$

където $R_n(x)$ е полином от n-та степен с неопределени коефициенти.

2. Числото a е k-кратен корен на характеристичното уравнение

$$r^n + a_{n-1} \,.\, r^{n-1} + \cdots + a_1 \,.\, r + a_0 = 0$$

В този случай търсим $\eta(x)$ от вида

$$\eta(x) = x^k \,.\, e^{ax} \,.\, R_n(x) \tag{3.74}$$

където $R_n(x)$ е полином от n-та степен с неопределени коефициенти.

Да припомним, че полиномите с неопределени коефициенти от съответната степен ($n \leq 4$) се пишат по следния начин:

Степен	**Полином** $R_n(x)$
$n = 0$	A
$n = 1$	$Ax + B$
$n = 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$n = 3$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$n = 4$	$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

3.33 Решете уравнението $y'' - 3y' - 10y = 50x^2 - 9$.

Решение:
1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' - 3y' - 10\,y = 0$. Характеристичното уравнение е $r^2 - 3r - 10 = 0$. Корените му са $r_1 = -2$ и $r_2 = 5$. На тях съответстват функциите $y_1(x) = e^{-2x}$, $y_2(x) = e^{5x}$ и решението е

$$Y(x) = C_1 \,.\, e^{-2x} + C_2 \,.\, e^{5x}$$

2. Сега търсим частното решение $\eta(x)$. В дясната страна на уравнението експоненциалната функция липсва, което означава че тя е с нулев степенен показател, т.е. $a = 0$. Тъй като нулата не е корен на характеристичното уравнение и полиномът $P_n(x) = P_2(x) = 50x^2 - 9$ е полином от втора степен, то частното решение търсим от вида

$$\eta(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Тъй като $\eta(x)$ е решение, то

$$\eta''(x) - 3\eta'(x) - 10\eta(x) = 50x^2 - 9. \tag{3.75}$$

Намираме първата и втората производни на $\eta(x)$

$$\eta'(x) = 2Ax + B, \quad \eta''(x) = 2A,$$

заместваме в (3.75) и получаваме

$$2A - 3\,.(2Ax + B) - 10(Ax^2 + Bx + C) = 50x^2 - 9$$

$$-10Ax^2 - (6A + 10B)x + 2A - 3B - 10C = 50x^2 + 0.x - 9$$

Но два полинома са равни само ако коефициентите пред съответните степени са равни. Следователно

$$\left|\begin{array}{lcr} -10A & = & 50 \\ -6A - 10B & = & 0 \\ 2A - 3B - 10C & = & -9 \end{array}\right.$$

От първото равенство намираме $A = -5$, заместваме във второто и намираме $B = 3$, а от третото $C = -1$.

Следователно

$$\eta(x) = -5x^2 + 3x - 1$$

Решението на уравнението е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1 \,.\, e^{-2x} + C_2 \,.\, e^{5x} - 5x^2 + 3x - 1$$

3.34 Решете уравнението $y'' + 2y' = 12x^2 + 4x - 4$.

Решение:
1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' + 2y' = 0$. Характеристичното му уравнение $r^2 + 2r = r(r+2) = 0$ има корени $r_1 = 0$ и $r_2 = -2$. На тях съответстват функциите $y_1(x) = e^{0x} = 1$, $y_2(x) = e^{-2x}$ и решението е

$$Y(x) = C_1 + C_2 \,.\, e^{-2x}$$

2. Сега търсим частното решение $\eta(x)$. Отново експоненциалната функция липсва, т.е. $a = 0$. Този път, обаче, нулата е корен на характеристичното уравнение, полиномът $P_n(x) = P_2(x) = 12x^2 + 4x - 4$ е полином от втора степен и частното решение има вида

$$\eta(x) = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Тъй като $\eta(x)$ е решение, то

$$\eta''(x) + 2\eta'(x) = 12x^2 + 4x - 4. \tag{3.76}$$

Първата и втората производни на $\eta(x)$ са

$$\eta'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \eta''(x) = 6Ax + 2B.$$

Заместваме в (3.76) и получаваме

$$6Ax + 2B + 2\,.(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 + 4x - 4$$

$$6Ax^2 + (6A + 4B)x + 2B + 2C = 12x^2 + 4x - 4$$

Но два полинома са равни само ако коефициентите пред съответните степени са равни. Следователно

$$\left|\begin{array}{rcr} 6A & = & 12 \\ 6A + 4B & = & 4 \\ 2B + 2C & = & -4 \end{array}\right.$$

От първото равенство намираме $A = 2$, заместваме във второто и намираме $B = -2$, а от третото $C = 0$.

Следователно

$$\eta(x) = 2x^3 - 2x^2$$

Решението на уравнението е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1 + C_2 \,.\, e^{-2x} + 2x^3 - 2x^2$$

3.35 Решете уравнението $y'' + 2y' - 8y = 5\,.e^{3x}$.

Решение:
1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' + 2y' - 8y = 0$. Характеристичното уравнение е $r^2+2r-8=0$. Корените му са $r_1 = 2$ и $r_2 = -4$. На тях съответстват функциите $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-4x}$ и решението е

$$Y(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{-4x}$$

2. Търсим частното решение $\eta(x)$. Тъй като числото в степенния показател на експоненциалната функция $a = 3$ не е корен на характеристичното уравнение и полиномът $P_n(x) = P_0 = 5$ е полином от нулева степен, то частното решение търсим от вида

$$\eta(x) = A\,.e^{3x}$$

Тъй като $\eta(x)$ е решение, то

$$\eta''(x) + 2\eta'(x) - 8\eta(x) = 5\,.e^{3x}. \tag{3.77}$$

Намираме първата и втората производни на $\eta(x)$

$$\eta'(x) = 3A\,.e^{3x}, \quad \eta''(x) = 9A\,.e^{3x},$$

заместваме в (3.77) и получаваме

$$9A\,.e^{3x} + 2\,.3A\,.e^{3x} - 8A\,.e^{3x} = 5\,.e^{3x}$$

$$7A\,.e^{3x} = 5\,.e^{3x}$$

Съкращаваме на $e^{3x} \neq 0$, получаваме $A = \dfrac{5}{7}$ и

следователно

$$\eta(x) = \frac{5}{7} \cdot e^{3x}$$

Решението на уравнението е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{4x} + \frac{5}{7} \cdot e^{3x}$$

3.36 Решете уравнението $y'' + 2y' - 8y = (2x-5)\,.e^{3x}$.

Решение:
1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' + 2y' - 8y = 0$. Характеристичното уравнение има корени $r_1 = 2$, $r_2 = -4$ и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{-4x}$$

2. Сега търсим частното решение $\eta(x)$. Тъй като числото в степенния показател на експоненциалната функция $a = 3$ не е корен на характеристичното уравнение и полиномът $P_n(x) = P_1(x) = 2x - 5$ е полином от първа степен, то частното решение търсим от вида

$$\eta(x) = (Ax + B)\,.e^{3x}$$

Тъй като $\eta(x)$ е решение, то

$$\eta''(x) + 2\eta'(x) - 8\eta(x) = (2x - 5)\,.e^{3x}. \tag{3.78}$$

Първата и втората производни на $\eta(x)$ са

$$\eta'(x) = A\,.e^{3x} + 3(Ax + B)\,.e^{3x} = (3Ax + A + 3B)\,.e^{3x}$$

$$\eta''(x) = (3A)\,.e^{3x} + 3(3Ax + A + 3B)\,.e^{3x} = (9Ax + 6A + 9B)\,.e^{3x}.$$

Заместваме в (3.78) и получаваме

$$(9Ax + 6A + 9B)\,.e^{3x} + 2\,.(3Ax + A + 3B)\,.e^{3x} - 8(Ax + B)\,.e^{3x} = (2x - 5)\,.e^{3x}$$

$$(7Ax + 8A + 7B)\,.e^{3x} = (2x - 5)\,.e^{3x}$$

Съкращаваме на $e^{3x} \neq 0$ и получаваме

$$7Ax + 8A + 7B = 2x - 5$$

Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени:

$$\left|\begin{array}{lcr} 7A & = & 2 \\ 8A + 7B & = & -5 \end{array}\right.$$

От първото равенство намираме $A = \dfrac{2}{7}$, заместваме във второто и намираме $B = -\dfrac{51}{49}$.

Следователно

$$\eta(x) = \left(\frac{2}{7}x - \frac{51}{49}\right) e^{3x}$$

Решението на уравнението е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{4x} + \left(\frac{2}{7}x - \frac{51}{49}\right) e^{3x}$$

3.37 Решете уравнението $y'' - 5y' + 6y = (4x + 3)\,.e^{2x}$.

Решение:
1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 - 5r + 6 = 0$ има корени $r_1 = 2,\ r_2 = 3$ и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{3x}$$

2. Сега търсим частното решение $\eta(x)$. Тъй като числото в степенния показател на експоненциалната функция $a = 2$ е корен на характеристичното уравнение

и полиномът $P_n(x) = P_1(x) = 4x + 3$ е полином от първа степен, то частното решение търсим от вида

$$\eta(x) = x(Ax + B)\,.e^{2x} = (Ax^2 + Bx)\,.e^{2x}$$

Тъй като $\eta(x)$ е решение, то

$$\eta''(x) - 5\eta'(x) + 6\eta(x) = (4x + 3)\,.e^{2x}. \tag{3.79}$$

Намираме първата и втората производни на $\eta(x)$

$$\eta'(x) = (2Ax + B)\,.e^{2x} + 2(Ax^2 + Bx)\,.e^{2x} = (2Ax^2 + 2Ax + 2Bx + B)\,.e^{2x}$$

$$\eta''(x) = (4Ax+2A+2B)\,.e^{2x}+2(2Ax^2+2Ax+2Bx+B)\,.e^{2x} = (4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B)\,.e^{2x}$$

Заместваме в (3.79). Резултатът е

$$(4Ax^2+8Ax+4Bx+2A+4B)\,.e^{2x}-5\,.(2Ax^2+2Ax+2Bx+B)\,.e^{2x}+6(Ax^2+Bx)\,.e^{2x} = (4x+3)\,.e^{2x}$$

$$(-2Ax + 2A + 5B)\,.e^{2x} = (4x + 3)\,.e^{2x}$$

Съкращаваме на $e^{2x} \neq 0$ и получаваме

$$-2Ax + 2A + 5B = 4x + 3$$

Но два полинома са равни само когато коефициентите пред съответните степени са равни. Следователно

$$\left|\begin{array}{lcl} -2A & = & 4 \\ 2A + 5B & = & 3 \end{array}\right.$$

От първото равенство намираме $A = -2$, заместваме във второто и намираме $B = \dfrac{7}{5}$.

Следователно

$$\eta(x) = \left(-2x^2 + \frac{7}{5}x\right) e^{2x}$$

и решението на уравнението е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1\,.\,e^{2x} + C_2\,.\,e^{3x} + \left(-2x^2 + \frac{7}{5}x\right) e^{2x}$$

Да разгледаме сега общия случай, когато функцията $f(x)$ има вида

$$f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right] \tag{3.80}$$

и $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ са полиноми съответно от n-та и m-та степен.

Възможни са два случая:

1. Числото $a + b.i$ не е корен на характеристичното уравнение

$$r^n + a_{n-1}\,.\,r^{n-1} + \cdots + a_1\,.\,r + a_0 = 0$$

В този случай търсим $\eta(x)$ от вида

$$\eta(x) = e^{ax}\,.\,\left[R_s(x)\cos bx + T_s(x)\sin bx\right], \tag{3.81}$$

където $R_s(x)$ и $T_s(x)$ са полиноми с неопределени коефициенти от степен $s = \max(n, m)$.

2. Числото $a + b.i$ е k-кратен корен на характеристичното уравнение

$$r^n + a_{n-1}\,.\,r^{n-1} + \cdots + a_1\,.\,r + a_0 = 0$$

В този случай търсим $\eta(x)$ от вида

$$\eta(x) = x^k\,.\,e^{ax}\left[R_s(x)\cos bx + T_s(x)\sin bx\right] \tag{3.82}$$

където $R_s(x)$ и $T_s(x)$ са полиноми с неопределени коефициенти от степен $s = \max(n, m)$.

3.38 Решете уравнението $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$.

Решение:
1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$ има корени $r_1 = 1,\ r_2 = 2$ и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1\,.\,e^x + C_2\,.\,e^{2x}$$

2. Търсим частното решение $\eta(x)$. Тъй като

$$f(x) = 2\sin x = e^{0x}(0\cos x + 2\sin x),$$

то $a = 0$ и $b = 1$. Числото $a + b\,i = i$ не е корен на характеристичното уравнение и $s = 0$, защото полиномите пред тригонометричните функции са от нулева степен. Частното решение търсим от вида

$$\eta(x) = A\cos x + B\sin x$$

Тъй като $\eta(x)$ е решение, то

$$\eta''(x) - 3\eta'(x) + 2\eta(x) = 2\sin x \tag{3.83}$$

Намираме първата и втората производни на $\eta(x)$

$$\eta'(x) = -A\sin x + B\cos x$$

$$\eta''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

Заместваме в (3.83) и получаваме

$$-A\cos x - B\sin x - 3(-A\sin x + B\cos x) + 2(A\cos x + B\sin x) = 2\sin x$$

$$-A\cos x - B\sin x + 3A\sin x - 3B\cos x + 2A\cos x + 2B\sin x = 2\sin x$$

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 2\sin x$$

$$(A - 3B)\cos x + (3A + B)\sin x = 0\cos x + 2\sin x$$

Но функциите $\cos x$ и $\sin x$ са линейно независими и следователно

$$\left|\begin{array}{rcl} A - 3B & = & 0 \\ 3A + B & = & 2 \end{array}\right.$$

От първото уравнение изразяваме $A = 3B$, заместваме във второто и получаваме $10B = 2$. Тогава $B = \dfrac{1}{5}$ и $A = 3B = \dfrac{3}{5}$.

Следователно

$$\eta(x) = \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

и решението на уравнението е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x) = C_1 \,.\, e^x + C_2 \,.\, e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$$

3.39 Решете уравнението $y'' - 2y' + 10y = 12e^x\cos 3x$.

Решение:

1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y'' - 2y' + 10y = 0$. Характеристичното уравнение $r^2 - 2r + 10 = 0$ има корени

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6\,i}{2} = 1 \pm 3\,i$$

и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1 \,.\, e^x\cos 3x + C_2 \,.\, e^x\sin 3x = e^x(C_1 \,.\, \cos 3x + C_2 \,.\, \sin 3x)$$

2. Търсим частното решение $\eta(x)$. Тъй като

$$f(x) = 12e^x \cos 3x = e^x(12. \cos 3x + 0. \sin 3x),$$

то $a = 1$ и $b = 3$. Числото $a+b\,i = 1+3i$ е корен на характеристичното уравнение и $s = 0$, защото полиномите пред тригонометричните функции са от нулева степен. Следователно частното решение има вида

$$\eta(x) = x.e^x(A\cos 3x + B\sin 3x) = e^x(Ax. \cos 3x + Bx. \sin 3x)$$

Тъй като $\eta(x)$ е решение, то

$$\eta''(x) - 2\eta'(x) + 10\eta(x) = 12e^x \cos 3x \tag{3.84}$$

Намираме първата и втората производни на $\eta(x)$

$$\eta'(x) = e^x(Ax. \cos 3x + Bx. \sin 3x) + e^x[A(\cos 3x - 3x\sin 3x) + B(\sin 3x + 3x\cos 3x)]$$

$$\eta'(x) = e^x[(Ax + 3Bx + A). \cos 3x + (Bx - 3Ax + B)\sin 3x]$$

$$\eta''(x) = e^x[(Ax + 3Bx + A). \cos 3x + (Bx - 3Ax + B)\sin 3x] +$$

$$+e^x[(A+3B). \cos 3x - 3(Ax+3Bx+A). \sin 3x + (B-3A)\sin 3x + 3(Bx-3Ax+B)\cos 3x]$$

$$\eta''(x) = e^x[(-8Ax + 6Bx + 2A + 6B). \cos 3x + (-6Ax - 8Bx - 6A + 2B)\sin 3x]$$

Заместваме в (3.84) и получаваме

$$\begin{gathered} e^x[(-8Ax + 6Bx + 2A + 6B). \cos 3x + (-6Ax - 8Bx - 6A + 2B)\sin 3x] \\ -2e^x[(Ax + 3Bx + A). \cos 3x + (Bx - 3Ax + B)\sin 3x] \\ +10e^x(Ax. \cos 3x + Bx. \sin 3x) = 12e^x \cos 3x \end{gathered}$$

Съкращаваме на $e^x \neq 0$ и получаваме

$$[(-8Ax + 6Bx + 2A + 6B) - 2(Ax + 3Bx + A) + 10Ax]\cos 3x +$$
$$[(-6Ax - 8Bx - 6A + 2B) - 2(Bx - 3Ax + B) + 10Bx]\sin 3x = 12. \cos 3x + 0. \sin 3x$$

$$6B\cos 3x - 6A\sin 3x = 12. \cos 3x + 0. \sin 3x$$

Но функциите $\cos 3x$ и $\sin 3x$ са линейно независими и следователно

$$\left| \begin{array}{rcr} 6B & = & 12 \\ -6A & = & 0 \end{array} \right.$$

От първото уравнение получаваме $B = 2$, а от второто $A = 0$.

Следователно

$$\eta(x) = 2xe^x \sin 3x$$

и решението на уравнението е

$$y(x) = e^x(Ax\cos 3x + Bx\sin 3x) + 2xe^x \sin 3x$$

Линейни нехомогенни ДУ от n-ти ред

Разглеждаме уравнението

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\,.\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\,.\,y'(x) + a_0(x)\,.\,y(x) = f(x) \tag{3.85}$$

Както знаем, общото решение $y(x)$ на това уравнение е сума от решението $Y(x)$ на съответното хомогенно уравнение (3.86)

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,.\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\,.\,y'(x) + a_0(x)\,.\,y(x) = 0 \tag{3.86}$$

и едно частно решение $\eta(x)$, т.е.

$$y(x) = Y(x) + \eta(x)$$

Освен това знаем, че ако

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$$

е фундаментална система решения на (3.86), то решението $Y(x)$ има вида

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,.\,y_k(x), \tag{3.87}$$

където C_k са произволни константи.

Следователно

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\,.\,y_k(x) + \eta(x)$$

Ще покажем, че ако е известна фундаментална система решения на хомогенното уравнение, то частното решение $\eta(x)$ може да се намери чрез **метода на Лагранж (метод на вариране на константите)**.

Търсим $\eta(x)$ от вида (3.87), но множителите C_k стават функции, т.е.

$$\eta(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\,.\,y_k(x) \tag{3.88}$$

Намирането на тези n на брой функции $C_k(x)$ става чрез решаване на следната линейна система относно производните на тези функции

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}
y_1(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2(x)\cdot C_2'(x) & + & \cdots & + & y_n(x)\cdot C_n'(x) & = & 0\\
y_1'(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2'(x)\cdot C_2'(x) & + & \cdots & + & y_n'(x)\cdot C_n'(x) & = & 0\\
y_1''(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2''(x)\cdot C_2'(x) & + & \cdots & + & y_n''(x)\cdot C_n'(x) & = & 0\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\\
y_1^{(n-1)}(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2^{(n-1)}(x)\cdot C_2'(x) & + & \cdots & + & y_n^{(n-1)}(x)\cdot C_n'(x) & = & f(x)
\end{array}\right.$$

Ще отбележим, че тази система има единствено решение, защото нейната детерминанта е детерминантата на Вронски

$$W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)]$$

за фундаменталната система функции и според Теорема 3.4 тя е различна от нула.

<u>Доказателството ще направим за $n = 2$.</u>

В този случай уравнението има вида

$$y''(x) + a_1(x)\,.\,y'(x) + a_0(x)\,.\,y(x) = f(x), \tag{3.89}$$

а частното решение ще търсим от вида

$$\eta(x) = C_1(x)\,.\,y_1(x) + C_2(x)\,.\,y_2(x) \tag{3.90}$$

Основната ни задача е да намерим неизвестните функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ като използваме само това, че $\eta(x)$ удовлетворява уравнението (3.89).

Намираме първата производна

$$\eta'(x) = C_1'(x)\,.\,y_1(x) + C_1(x)\,.\,y_1'(x) + C_2'(x)\,.\,y_2(x) + C_2(x)\,.\,y_2'(x) =$$

$$= C_1'(x)\,.\,y_1(x) + C_2'(x)\,.\,y_2(x) + C_1(x)\,.\,y_1'(x) + C_2(x)\,.\,y_2'(x)$$

Полагаме

$$C_1'(x)\,.\,y_1(x) + C_2'(x)\,.\,y_2(x) = 0 \tag{3.91}$$

Следователно

$$\eta'(x) = C_1(x)\,.\,y_1'(x) + C_2(x)\,.\,y_2'(x)$$

Сега намираме втората производна

$$\eta''(x) = C_1'(x)\,.\,y_1'(x) + C_1(x)\,.\,y_1''(x) + C_2'(x)\,.\,y_2'(x) + C_2(x)\,.\,y_2''(x) =$$

$$= C_1'(x)\,.\,y_1'(x) + C_2'(x)\,.\,y_2'(x) + C_1(x)\,.\,y_1''(x) + C_2(x)\,.\,y_2''(x)$$

Заместваме $\eta(x)$, $\eta'(x)$ и $\eta''(x)$ в (3.89) и получаваме:

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)\,.\,y_1'(x)+C_2'(x)\,.\,y_2'(x)\ \ + \\
&+C_1(x)\,.\,y_1''(x)+C_2(x)\,.\,y_2''(x)\ \ + \\
&+a_1(x)\,.\,[\ C_1(x)\,.\,y_1'(x)+C_2(x)\,.\,y_2'(x)\ ]\ \ + \\
&+a_0(x)\,.\,[\ C_1(x)\,.\,y_1(x)+C_2(x)\,.\,y_2(x)\ ]=f(x)
\end{aligned}
$$

В последното равенство разкриваме скобите и получаваме

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)\,.\,y_1'(x) \qquad\qquad + C_2'(x)\,.\,y_2'(x)\ \ + \\
&+C_1(x)\,.\,y_1''(x) \qquad\quad\ + C_2(x)\,.\,y_2''(x)\ \ + \\
&+C_1(x)\,.\,a_1(x)\,.\,y_1'(x)+C_2(x)\,.\,a_1(x)\,.\,y_2'(x)\ \ + \\
&+C_1(x)\,.\,a_0(x)\,.\,y_1(x)+C_2(x)\,.\,a_0(x)\,.\,y_2(x)=f(x)
\end{aligned}
$$

Изнасяме общите множители $C_1(x)$ и $C_2(x)$ пред скоби и равенството добива вида:

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)\,.\,y_1'(x)\ +\ C_2'(x)\,.\,y_2'(x)\ \ + \\
&+C_1(x)\,.\,[\ \underbrace{y_1''(x)+a_1(x)\,.\,{y_1}'(x)+a_0(x)\,.\,y_1(x)}_{L(y_1)=0}\ ]\ \ + \\
&+C_2(x)\,.\,[\ \underbrace{y_2''(x)+a_1(x)\,.\,{y_2}'(x)+a_0(x)\,.\,y_2(x)}_{L(y_2)=0}\ ]\ \ =f(x)
\end{aligned}
$$

Но изразите в средните скоби са равни на нула, защото $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са решения на хомогенното уравнение. Следователно

$$
C_1'(x)\,.\,y_1'(x)+C_2'(x)\,.\,y_2'(x)=f(x) \tag{3.92}
$$

И така, получихме, че неизвестните функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ удовлетворяват системата

$$
\left|\begin{array}{lllll}
y_1(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2(x)\cdot C_2'(x) & = & 0 \\
y_1'(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2'(x)\cdot C_2'(x) & = & f(x),
\end{array}\right.
$$

с което доказателството завършва. ■

В този случай можем лесно да решим системата, като приложим формулите на Крамер (ВМ-I, Глава 5)

$$
C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}=\frac{-y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}
$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}$$

Следователно

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}\,dx$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}\,dx$$

3.40 Решете уравнението $y''' + y' = \dfrac{1}{\sin x}$

Решение:
1. Разглеждаме хомогенното уравнение $y''' + y' = 0$. Характеристичното уравнение $r^3 + r = r(r^2+1) = 0$ има корени

$$r_1 = 0, \qquad r_{2,3} = \pm i$$

Следователно фундаменталната система решения е

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = \cos x, \qquad y_3(x) = \sin x$$

и решението на хомогенното уравнение е

$$Y(x) = C_1 + C_2\,.\,\cos x + C_3\,.\,\sin x$$

2. Търсим частното решение $\eta(x)$ от вида

$$\eta(x) = C_1(x) + C_2(x)\,.\,\cos x + C_3(x)\,.\,\sin x$$

Неизвестните фукции $C_1(x)$, $C_2(x)$ и $C_3(x)$ намираме от системата:

$$\left|\begin{array}{lllllll} y_1(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2(x)\cdot C_2'(x) & + & y_3(x)\cdot C_3'(x) & = & 0 \\ y_1'(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2'(x)\cdot C_2'(x) & + & y_3'(x)\cdot C_3'(x) & = & 0 \\ y_1''(x)\cdot C_1'(x) & + & y_2''(x)\cdot C_2'(x) & + & y_3''(x)\cdot C_3'(x) & = & f(x) \end{array}\right.$$

В конкретния случай тя е

$$\left|\begin{array}{lllllll} 1\cdot C_1'(x) & + & \cos x\cdot C_2'(x) & + & \sin x\cdot C_3'(x) & = & 0 \\ 0\cdot C_1'(x) & - & \sin x\cdot C_2'(x) & + & \cos x\cdot C_3'(x) & = & 0 \\ 0\cdot C_1'(x) & - & \cos x\cdot C_2'(x) & - & \sin x\cdot C_3'(x) & = & \frac{1}{\sin x} \end{array}\right.$$

Тази система решаваме с формулите на Крамер и получаваме

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg} x$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = -1$$

Следователно

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\sin x}, \qquad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\operatorname{ctg} x, \qquad C_3'(x) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1$$

и след интегриране получаваме

$$C_1(x) = \int \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|, \qquad C_2(x) = -\int \operatorname{ctg} x\, dx = -\ln|\sin x|$$

$$C_3(x) = -\int 1\, dx = -x$$

Следователно частното решение е

$$\eta(x) = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| - \ln|\sin x| \,.\, \cos x - x \,.\, \sin x,$$

а общото решение е

$$y(x) = Y(x) + \eta(x)$$

Задачи за самостоятелна работа:

3.41 $y'' - 5y' + 4y = 5x - 3$

Отг. $C_1e^x + C_2e^{4x} + \frac{5}{4}x + \frac{13}{16}$

3.42 $y'' - 5y' + 4y = 3x^2 - 2x - 4$

Отг. $C_1e^x + C_2e^{4x} + \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{11}{8}x + \dfrac{11}{32}$

3.43 $y'' - 5y' + 4y = 7e^{4x}$

Отг. $C_1e^x + C_2e^{4x} + \dfrac{7}{3}\,x\,e^{4x}$

3.44 $y'' - 5y' + 4y = (12x + 7)e^{3x}$

Отг. $C_1e^x + C_2e^{4x} - \dfrac{1}{2}(12x - 13)e^{3x}$

3.45 $y'' - 5y' + 4y = (2x - 5)e^x$

Отг. $C_1e^x + C_2e^{4x} + \dfrac{1}{9}(-3x^2 + 13)e^x$

3.46 $y'' - 5y' + 4y = (x^2 - 3x + 15)e^{2x}$

Отг. $C_1e^x + C_2e^{4x} - \left(\dfrac{x^2}{2} - 2x + 9\right)e^{2x}$

3.47 $y'' - 5y' + 6y = 11\,e^{3x}$

Отг. $C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + 11xe^{3x}$

3.48 $y'' - 5y' + 6y = 5x\,e^x$

Отг. $C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \dfrac{1}{4}(10x + 15)e^x$

3.49 $y'' - 5y' + 6y = (3x - 1)\,e^{2x}$

Отг. $C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - \dfrac{1}{2}(3x^2 + 4x)e^{2x}$

3.50 $y'' - 5y' + 6y = (6x^2 - 5x + 3)\,e^{5x}$

Отг. $C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \dfrac{1}{4}(4x^2 - 10x + 9)e^{5x}$

3.51 $y'' - 4y' - 5y = (2x + 1)\,e^{5x}$

Отг. $C_1e^{-x} + C_2e^{5x} + \dfrac{1}{18}(3x^2 + 2x)e^{5x}$

3.52 $y'' + 2y' - 3y = 3\,e^{-3x}$

Отг. $C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} - \frac{3}{4} x e^{-3x}$

3.53 $y'' + 2y' - 8y = (3x-7)\,e^{3x}$

Отг. $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{49}(21x - 73)e^{3x}$

3.54 $y'' - 4y = x\,e^{x}$

Отг. $C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{9}(3x+2)e^{x}$

3.55 $y'' + 4y = x\,e^{x}$

Отг. $C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + \frac{1}{25}(5x-2)e^{x}$

3.56 $y'' + y = 2\sin x$

Отг. $C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x - x \cos x$

3.57 $y'' + 9y = 2\,x \cos x$

Отг. $C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + \frac{1}{16} \sin x + \frac{x}{4} \cos x$

3.58 $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$

Отг. $C_1 \sin x + C_2 \cos x + x \sin x + \cos x \, \ln|\cos x|$

3.59 $y'' + y = \operatorname{tg} x$

Отг. $C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \, \ln\left|\, \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

3.60 $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x}$

Отг. $C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} - x(\ln|x| - 1)e^{x}$

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Манолов, А. Петрова-Денева и др., Висша математика. Част 3, Техника, София, 1977.

[2] С. Манолов, Н. Шополов и др., Сборник от задачи по висша математика. Техника, София, 1979.

[3] И. Проданов, Н. Хаджииванов, И. Чобанов, Сборник по диференциално и интегрално смятане. НИ, София, 1976.

[4] В. Топенчаров, Н. Стоянов и др. Сборник от задачи по висша математика. Част 3. София, Техника, 1979.

[5] Я.С. Бугров, С.М. Никольский, Дифференциальное и интегральное исчисления. Москва, Наука, 1988.

[6] Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисления. Том I, Москва, Наука, 1978.

[7] R. Larson, B. Edwards, Finite Mathematics with Calculus, D.C. Heat and Company, Lexington, Massachusetts, 1991.

[8] H. Jerome Keisler, Elementary Calculus, Second edition, University of Wisconsin, 2009.

[9] J. Marsden, A. Weinstein, Calculus I, II, Second edition, Springer, 1985.