1. Определете дефиниционната област на функцията:

а) $y = \dfrac{x^2+2}{x^3}$ **б)** $y = (x+1)e^{x-2}$ **в)** $y = \ln(2x-1)$

Решение:

а) Знаменателят на една дроб не може да бъде равен на 0. Следователно за стойностите на променливата x имаме ограничението $x^3 \neq 0 \iff x \neq 0.$ Т. е. дефиниционната област на функцията е $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

б) Няма никакви ограничения за стойностите на променливата x. Следователно функцията е дефинирана за всяко $x \in (-\infty, +\infty)$.

в) Логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Следователно за стойностите на променливата x имаме ограничението

$2x-1>0 \iff 2x>1 \iff x>\dfrac{1}{2}$, т.е. дефиниционната област е интервалът $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$.

2. Намерете границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x+3}{1-2x^3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^{-2x}}{2-x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$

Решение:

а) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x+3}{1-2x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\left(1-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(\dfrac{1}{x^3}-2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(1-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^3}-2\right)}$$

Като вземем предвид, че $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$ и следователно

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{x^4} = 0$, получаваме $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-2x+3}{1-2x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{-2} = -\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2^+} e^{-2x} = e^{-4}$ и $\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x) = 0^-$, т.е. числителят в израза $\dfrac{e^{-2x}}{2-x}$ клони към някакво положително число, а знаменателят клони към 0 с отрицателни стойности. Като вземем предвид, че

$\lim\limits_{u\to 0^-} \dfrac{1}{u} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty$, получаваме $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{e^{-2x}}{2-x} = \left[\dfrac{e^{-4}}{0^-}\right] = -\infty$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$. Следователно в израза $\dfrac{\ln x}{x^2}$ при $x\to+\infty$ имаме неопределеност от вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Като приложим правилото на Лопитал, получаваме:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

3. Намерете производната на функцията:

а) $y=4x-\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-5$ **б)** $y=x^4e^{2x}$

в) $y=\dfrac{\sin 3x}{x^2}$ **г)** $y=arctg(x^3)$

Решение:

а) Всички събираеми са степенни функции, т.е. като вземем предвид, че

$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ и $\dfrac{1}{x^a}=x^{-a}$, получаваме

$$y=4x-x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}-5=4x-x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{2}{3}}-5$$

От таблицата с производните на основните елементарни функции виждаме, че

$(C)'=0$, $(Cu(x))'=Cu'(x)$, $(x^a)'=ax^{a-1}$, $(x)'=1$.

Следователно $y'=4(x)'-\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+2\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'-(5)'=4-\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}-0=$

$$=4-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}}=4-\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{4}{3x^{\frac{5}{3}}}=4-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

б) Прилагаме правилото за диференциране на произведение

$$(u(x).v(x))'=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$$

или накратко $(u.v)' = u'.v + u.v'$

В дадения случай $u = x^4$ и $v = e^{2x}$. Следователно $y' = \left(x^4\right)'.e^{2x} + x^4.\left(e^{2x}\right)'$.

От формулата $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ получаваме, че $\left(x^4\right)' = 4x^3$. От формулата $\left(e^x\right)' = e^x$

и правилото за диференциране на сложна функция

$\left(F(u(x))\right)' = F'(u(x)).u'(x) = F'(u).u'$ получаваме,че $\left(e^u\right)' = e^u.u'$, т.е.

$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}.(2x)' = e^{2x}.2 = 2e^{2x}$.

Следователно

$y' = \left(x^4\right)'.e^{2x} + x^4.\left(e^{2x}\right)' = 4x^3.e^{2x} + x^4.2e^{2x} = 2x^3.e^{2x}(2+x)$

в) Прилагаме правилото за диференциране на частно

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

или накратко $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

В дадения случай $u = \sin 3x$ и $v = x^2$. Следователно $y' = \dfrac{(\sin 3x)'.x^2 - \sin 3x.\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}$.

От формулата $(\sin x)' = \cos x$ и правилото за диференциране на сложна функция

$\left(F(u(x))\right)' = F'(u).u'$ получаваме,че $(\sin u)' = (\cos u).u'$, т.е.

$(\sin 3x)' = (\cos 3x).(3x)' = (\cos 3x).3 = 3\cos 3x$.

От формулата $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ получаваме, че $\left(x^2\right)' = 2x$.

Следователно

$$y' = \frac{(\sin 3x)'.x^2 - \sin 3x.\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = \frac{3(\cos 3x).x^2 - (\sin 3x).2x}{x^4} = \frac{3x^2\cos 3x - 2x.\sin 3x}{x^4}$$

г) От формулата $\boxed{\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}}$ и правилото за диференциране на сложна функция $\left(F\left(u(x)\right)\right)' = F'(u).u'$ получаваме, че $\boxed{\left(arctgu\right)' = \left(\frac{1}{1+u^2}\right).u'}$.

В дадения случай $u = x^3$, следователно $y' = \left(\frac{1}{1+\left(x^3\right)^2}\right).\left(x^3\right)' = \left(\frac{1}{1+x^6}\right).3x^2 = \frac{3x^2}{1+x^6}$.

4. Решете интегралите:

а) $\int\left(2x^2 - 3x + \frac{1}{x^2} - 4\sqrt{x} + 5\right)dx$ **б)** $\int \frac{1}{5x-2}dx$

в) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ **г)** $\int \cos(4x)dx$

Решение:

а) $\int\left(2x^2 - 3x + \frac{1}{x^2} - 4\sqrt{x} + 5\right)dx = 2\int x^2dx - 3\int xdx + \int x^{-2}dx - 4\int x^{\frac{1}{2}}dx + 5\int dx$

Като приложим формулата $\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$, от която следва $\boxed{\int dx = x}$, получаваме

$$\int\left(2x^2 - 3x + \frac{1}{x^2} - 4\sqrt{x} + 5\right)dx = 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} - 4\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 5x = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{x} - \frac{8}{3}\sqrt{x^3} + 5x$$

б) Прилагаме формулата $\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|}$, или по-общо $\boxed{\int \frac{1}{u(x)}du(x) = \ln|u(x)|}$, като в дадения случай $u(x) = 5x-2$.

$$\int \frac{1}{5x-2}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{5x-2}d(5x) = \frac{1}{5}\int \frac{1}{5x-2}d(5x-2) = \ln|5x-2|$$

в) От формулата $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}}$, при $a = 2$ получаваме

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{2}$$

г) Прилагаме формулата $\int \cos xdx = \sin x$, или по-общо $\int couxdu = \sin u$, като в дадения случай $u = 4x$.

$$\int \cos(4x)dx = \frac{1}{4}\int \cos(4x)d(4x) = \frac{1}{4}\sin(4x)$$

Други правила и формули

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^x\right) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^x\right) = 0$ $\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$

$(\cos x)' = -\sin x$ $(\cos u)' = (-\sin u).u'$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(\ln u)' = \left(\dfrac{1}{u}\right).u'$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arcsin u)' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right).u'$

$\int e^x dx = e^x$ $\int e^{u(x)}du(x) = e^{u(x)}$

$\int \sin xdx = -\cos x$ $\int \sin u(x)du(x) = -\cos u(x)$

$\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}$