1. Дадени са комплексните числа $z_1 = 1 - 3i$ и $z_2 = -2 - i$. Пресметнете $z_1.z_2$ и изобразете числата z_1, z_2 и $z_1.z_2$ като точки в комплексната равнина.

Решение:

$$z_1.z_2 = (1-3i).(-2-i) = 1.(-2) + 1.(-i) + (-3i).(-2) + (-3i).(-i) =$$
$$= -2 - i + 6i + 3i^2 = -2 + 5i + 3.(-1) = -2 + 5i - 3 = -5 + 5i.$$

Числото z_1 се изобразява като точка с координати $(1,-3)$.
Числото z_2 се изобразява като точка с координати $(-2,-1)$.
Числото z_3 се изобразява като точка с координати $(-5, 5)$.

2. Намерете произведението на матриците $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A.B = \begin{pmatrix} 3.(-2)+(-1).2+1.1 & 3.3+(-1).(-1)+1.2 \\ 2.(-2)+(-1).2+2.1 & 2.3+(-1).(-1)+2.2 \\ 0.(-2)+0.2+4.1 & 0.3+0.(-1)+4.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -4 & 11 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Решете системата $\left| \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = -1 \end{array} \right.$

Решение:

По формулите на Крамер $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ и $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, където

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - 3.(-3) = 4 + 9 = 13$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - (-1).(-3) = 2 - 3 = -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2.(-1) - 3.1 = -2 - 3 = -5$$

Следователно $x = -\dfrac{1}{13}$ и $y = -\dfrac{5}{13}$.

4. Намерете скаларното и векторното произведение на векторите $\vec{a}(1,-1,-2)$ и $\vec{b}(0,-3,1)$.

Решение: Ако векторите са $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$, то скаларното произведение е числото

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 \quad ,$$

а векторното произведение е векторът

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.\vec{k}$$

В дадения случай имаме:

$$\vec{a}.\vec{b} = 1.0 + (-1).(-3) + (-2).1 = 0 + 3 - 2 = 1$$

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}.\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}.\vec{k} = -7\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} \ ,$$

т.е. векторното произведение има координати $(-7,-1,-3)$.

5. Дадени са точките $A(2,-4)$ и $B(-4,3)$. Напишете уравнението на правата AB.

Решение: Ако правата l минава през точката $M(x_0, y_0)$ и е успоредна на вектора $\vec{a}(a_1,a_2)$, който наричаме направляващ вектор на правата, то уравнението на l се получава по формулата

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}$$

В дадения случай $x_0 = 2,\quad y_0 = -4$ (това са координатите на т. A), а направляващ вектор на правата AB ще бъде самият вектор $\overrightarrow{AB}$. Координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$ получаваме, като от координатите на т. B извадим съответните координати на т. A, т.е. $\overrightarrow{AB}(-4-2,\, 3-(-4)) = \overrightarrow{AB}(-6,\, 7)$. Следователно уравнението на правата AB е:

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y-(-4)}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 7.(x-2) = -6.(y+4) \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 14 = -6y - 24 \quad \Leftrightarrow \quad 7x + 6y + 10 = 0$$

1. Определете дефиниционната област на функцията:

а) $y=\dfrac{x^2+2}{x^3}$ **б)** $y=(x+1)e^{x-2}$ **в)** $y=\ln(2x-1)$

Решение:

а) Знаменателят на една дроб не може да бъде равен на 0. Следователно за стойностите на променливата x имаме ограничението $x^3\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 0.$ Т. е. дефиниционната област на функцията е $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

б) Няма никакви ограничения за стойностите на променливата x. Следователно функцията е дефинирана за всяко $x\in(-\infty,+\infty)$.

в) Логаритмичната функция е дефинирана само за положителни стойности на аргумента. Следователно за стойностите на променливата x имаме ограничението

$2x-1>0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x>1 \quad\Leftrightarrow\quad x>\dfrac{1}{2}$, т.е. дефиниционната област е интервалът $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Намерете границите:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+3}{1-2x^3}$ **б)** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{e^{-2x}}{2-x}$ **в)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

Решение:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x+3}{1-2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(1-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(\dfrac{1}{x^3}-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^3}-2\right)}$$

Като вземем предвид, че $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$ и следователно

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^4}=0$, получаваме $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+3}{1-2x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{-2}=-\infty$

б) $\lim\limits_{x\to 2^+}e^{-2x}=e^{-4}$ и $\lim\limits_{x\to 2^+}(2-x)=0^-$, т.е. числителят в израза $\dfrac{e^{-2x}}{2-x}$ клони към някакво положително число, а знаменателят клони към 0 с отрицателни стойности. Като вземем предвид, че

$\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{1}{u}=\left[\dfrac{1}{0^-}\right]=-\infty$, получаваме $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{e^{-2x}}{2-x}=\left[\dfrac{e^{-4}}{0^-}\right]=-\infty$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$. Следователно в израза $\dfrac{\ln x}{x^2}$ при $x\to+\infty$ имаме неопределеност от вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Като приложим правилото на Лопитал, получаваме:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

3. Намерете производната на функцията:

а) $y=4x-\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-5$ **б)** $y=x^4e^{2x}$

в) $y=\dfrac{\sin 3x}{x^2}$ **г)** $y=arctg(x^3)$

Решение:

а) Всички събираеми са степенни функции, т.е. като вземем предвид, че

$\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ и $\dfrac{1}{x^a}=x^{-a}$, получаваме

$$y=4x-x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}-5=4x-x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{2}{3}}-5$$

От таблицата с производните на основните елементарни функции виждаме, че

$(C)'=0$, $(Cu(x))'=Cu'(x)$, $(x^a)'=ax^{a-1}$, $(x)'=1$.

Следователно $y'=4(x)'-\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'+2\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'-(5)'=4-\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}-0=$

$$=4-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{5}{3}}=4-\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{4}{3x^{\frac{5}{3}}}=4-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}}$$

б) Прилагаме правилото за диференциране на произведение

$$(u(x).v(x))'=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$$

или накратко $\boxed{(u.v)' = u'.v + u.v'}$

В дадения случай $u = x^4$ и $v = e^{2x}$. Следователно $y' = (x^4)'.e^{2x} + x^4.(e^{2x})'$.

От формулата $(x^a)' = ax^{a-1}$ получаваме, че $(x^4)' = 4x^3$. От формулата $\boxed{(e^x)' = e^x}$ и правилото за диференциране на сложна функция

$(F(u(x)))' = F'(u(x)).u'(x) = F'(u).u'$ получаваме,че $\boxed{(e^u)' = e^u.u'}$, т.е.

$(e^{2x})' = e^{2x}.(2x)' = e^{2x}.2 = 2e^{2x}$.

Следователно

$$y' = (x^4)'.e^{2x} + x^4.(e^{2x})' = 4x^3.e^{2x} + x^4.2e^{2x} = 2x^3.e^{2x}(2+x)$$

в) Прилагаме правилото за диференциране на частно

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

или накратко $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}}$

В дадения случай $u = \sin 3x$ и $v = x^2$. Следователно $y' = \frac{(\sin 3x)'.x^2 - \sin 3x.(x^2)'}{(x^2)^2}$.

От формулата $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$ и правилото за диференциране на сложна функция

$(F(u(x)))' = F'(u).u'$ получаваме,че $\boxed{(\sin u)' = (\cos u).u'}$, т.е.

$(\sin 3x)' = (\cos 3x).(3x)' = (\cos 3x).3 = 3\cos 3x$.

От формулата $(x^a)' = ax^{a-1}$ получаваме, че $(x^2)' = 2x$.

Следователно

$$y' = \frac{(\sin 3x)'.x^2 - \sin 3x.(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{3(\cos 3x).x^2 - (\sin 3x).2x}{x^4} = \frac{3x^2\cos 3x - 2x.\sin 3x}{x^4}$$

г) От формулата $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$ и правилото за диференциране на сложна функция $\left(F\left(u\left(x\right)\right)\right)' = F'\left(u\right).u'$ получаваме, че $\left(arctgu\right)' = \left(\frac{1}{1+u^2}\right).u'$.

В дадения случай $u = x^3$, следователно $y' = \left(\frac{1}{1+\left(x^3\right)^2}\right).\left(x^3\right)' = \left(\frac{1}{1+x^6}\right).3x^2 = \frac{3x^2}{1+x^6}$.

Други правила и формули

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$\lim_{x\to 0}\left(\ln x\right) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty}\left(e^x\right) = +\infty$ $\lim_{x\to -\infty}\left(e^x\right) = 0$ $\sin 0 = 0$ $\cos 0 = 1$

$\left(\cos x\right)' = -\sin x$ $\left(\cos u\right)' = \left(-\sin u\right).u'$

$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$ $\left(\ln u\right)' = \left(\frac{1}{u}\right).u'$

$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\arcsin u\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right).u'$